MATH/STA

MATH/STAT.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

PAR

LUIGI CREMONA,

DIRECTEUR DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DES INGÉNIEURS A ROME,

traduits, avec la collaboration de l'auteur,

PAR ED. DEWULF,

Chef de bataillon du Génie, Officier de la Légion d'Honneur, etc.

PREMIÈRE PARTIE.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1875

(Tous droits réservés)

QA471
C72
Math.
Dept.

GIFT OF
MRS. THERESE F. COLIN

PRÉFACE.

> Amplissima et pulcherrima scientia figurarum. At quam est inepte sortita nomen Geometriæ !
>
> NIC. FRISCHLINUS, *in Dialogo primo.*

> Perspectivæ methodus, quâ nec inter inventas nec inter inventu possibiles ulla compendiosior esse videtur.....
>
> B. PASCAL *in Lit. ad Acad. Paris.*, 1654.

> Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis
> Causa, sed utilitas officiumque fuit.
>
> OVIDIUS, *in Fastis*, III, 9.

Ce livre n'est pas destiné à ceux qui ont la haute mission de faire progresser la science; ils n'y trouveraient rien de nouveau, ni comme doctrines ni comme méthodes. Toutes les propositions sont anciennes, plusieurs remontent à des géomètres de l'antiquité la plus reculée. Chacun en pourra retrouver les traces dans EUCLIDE (285 avant J.-C.), dans APOLLONIUS de Perge (247 avant J.-C), dans PAPPUS d'Alexandrie (quatre siècles après J.-C.), dans DESARGUES de Lyon, (1593-1662), dans PASCAL (1623-1662), dans DE LA HIRE (1640-1718), dans NEWTON (1642-1727), dans MACLAURIN (1698-1746), dans J.-H. LAMBERT (1728-1777). On a coutume de nommer *modernes* les théories et les méthodes qui font de ces propositions un ensemble homogène et harmonieux, parce qu'elles ont été créées ou perfectionnées par des géomètres moins éloignés de nous, comme CARNOT, BRIANCHON, PONCELET, MÖBIUS, STEINER, CHASLES, STAUDT,... dont les ouvrages ont été publiés dans la première moitié de notre siècle.

Répandre dans les écoles italiennes la connaissance de ces théories si élégantes et si utiles, voilà le seul but de mon travail.

178640

Il ne faut pas croire cependant que de louables efforts n'aient été tentés en Italie pour se tenir au courant de la science géométrique. G. Bellavitis est le premier, si je ne me trompe, qui en ait ouvert la voie à la jeunesse studieuse, en publiant son *Essai de Géométrie dérivée* (1), qui a été suivi de beaucoup d'autres écrits; à Naples, N. Trudi (2) a résolu les questions d'un programme célèbre, destiné à donner l'essor aux méthodes d'invention géométrique et à les comparer. Dès 1854, l'Université de Pavie possédait un cours de Géométrie supérieure, et, quand l'Italie eut reconquis son indépendance politique (3), une chaire de Géométrie supérieure fut instituée dans toutes nos grandes universités, sur la proposition du professeur Brioschi. L'auteur de ces pages a enseigné cette même science pendant six ans à Bologne, et en a appliqué les méthodes à la Géométrie descriptive (4); placé plus tard à l'Institut technique supérieur de Milan, et invité par le directeur, M. Brioschi, à faire un cours de *Statique graphique*, il crut devoir faire, à titre de préparation indispensable, un bon nombre de leçons sur la *Géométrie de position* ou *Géométrie projective* (5). C'est ainsi que, chaque année, un grand nombre de jeunes gens se sont initiés aux méthodes modernes et ont

---

(1) *Nouveaux essais de l'Académie de Padoue*, vol. IV (1838), p. 243-288.

(2) *Productions relatives au programme de trois questions géométriques, proposé par le professeur Flauti en avril* 1839 (Naples, 1840-1841).

Je cite Bellavitis et Trudi comme exemples, mais je ne veux pas dire pour cela qu'aucun autre géomètre italien ne se soit occupé de Géométrie projective jusqu'à ce jour. Aussi je demande pardon, dès maintenant, pour les noms que je pourrais avoir oubliés; que le lecteur soit persuadé que je le fais sans intention; je ne me propose aucunement, du reste, de faire un résumé historique des progrès de la science.

(3) A Naples, cette chaire a été occupée par J. Battaglini, dont la science et les travaux sont connus de tous.

(4) Cette voie avait déjà été ouverte par d'autres. Voir Bellavitis, *Leçons de Géométrie descriptive* (Padoue, 1851). L'excellent ouvrage du professeur Fiedler, *Die darstellende Geometrie* (Leipzig, 1871), a été rédigé d'après les mêmes idées. E. Padova et A. Sayno ont publié une traduction italienne de cet ouvrage pour l'usage des Écoles polytechniques.

(5) A Zurich, le professeur Reye a fait un cours de *Geometrie der Lage* pour préparer les étudiants à suivre les leçons du professeur Culmann, le créateur de la Statique graphique.

appris à les appliquer aux différentes parties du dessin technique.

Mais tout cela était insuffisant; malgré l'immense fécondité de ces méthodes, leur simplicité est si grande qu'aucune partie des Mathématiques ne peut être apprise aussi facilement et avec un aussi mince bagage de connaissances préliminaires. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer que STAUDT a pu écrire sa *Geometrie der Lage* (1847) sans s'appuyer sur aucune notion de Géométrie élémentaire, et que, si cet excellent livre n'a pas eu un plus grand succès, c'est à cause du manque absolu de figures et à cause de son style remarquablement aride et concis. D'autres écrivains, guidés par la même pensée [1], après avoir établi les notions fondamentales d'espace, de surface, de ligne, de point, de droite, de plan ont établi directement celles de la *collinéation* et de la *réciprocité*. C'est cette pensée qui donnera peut-être bientôt la solution du problème de l'enseignement élémentaire de la Géométrie; alors, mais alors seulement, si je ne me trompe, nous aurons une méthode digne d'être substituée à celle d'Euclide, méthode dont l'introduction dans nos lycées a été l'objet d'attaques acharnées.

Cette simplicité naturelle des doctrines qui constituent la Géométrie projective, simplicité qui les rend aptes à entrer dans les éléments de la science, a été si bien comprise, que, dans tous les pays, des hommes dont le nom fait autorité se sont levés pour en demander l'admission dans le cadre des matières scolaires. Dans la docte et laborieuse Allemagne, en particulier, on publie chaque jour de nouveaux livres qui exposent la Géométrie projective, soit seule, soit avec la Géométrie ordinaire, et d'une manière de plus en plus simple, élémentaire et accessible même aux esprits médiocres. Ces livres, destinés aux gymnases et aux écoles royales, montrent que la *Nouvelle Géométrie* pénètre chaque jour davantage dans l'enseignement secondaire. Des ouvrages de même na-

---

[1] Par exemple, E. MÜLLER dans ses *Elemente der Geometrie streng systematisch dargestellt* (Brunswick, 1869).

ture, mais ayant un but moins bien défini, sont publiés aussi en Angleterre et en France.

. . . . . .

Bien des noms ont été donnés à cet ensemble de doctrines dont nous allons exposer les principes fondamentaux. Je ne veux pas adopter celui de *Géométrie supérieure* (*Hohere Geometrie*), parce que ce qui a pu paraître supérieur un jour est aujourd'hui très-élémentaire, ni celui de *Géométrie moderne* (*Neuere Geometrie*, *Modern Geometry*) qui n'exprime qu'une conception relative; du reste, quoique les méthodes puissent être considérées comme modernes, la matière est vieille en grande partie. Le titre de *Géométrie de position* (*Geometrie der Lage*), dans le sens de STAUDT (1), ne me paraît pas plus propre, parce qu'il exclut la considération des propriétés métriques des figures. J'ai choisi le titre de *Géométrie projective* (2), qui exprime la vraie nature des méthodes qui sont fondées essentiellement sur la projection centrale ou perspective. J'ai été confirmé dans mon choix en considérant que le grand PONCELET, le principal créateur des méthodes modernes, a intitulé son livre immortel : *Traité des propriétés projectives des figures* (1822).

La nomenclature que j'ai employée dans le texe est celle que j'ai adoptée depuis bien des années dans mes écrits et dans mes leçons publiques. Elle n'appartient en propre à aucune école; j'ai pris un terme à STEINER, un autre à PONCELET ou à CHASLES; j'ai eu à cœur de choisir ceux qui correspondent le mieux aux notions auxquelles ils s'appliquent, et qui sont plus faciles à transporter dans notre langue; j'ai,

---

(1) Équivalent à celui de *Descriptiv Geometry* de CAYLEY (*Sixth Memoir upon quantics*, dans les *Transactions philosophiques de la Société royale de Londres*, 1859, p. 90). *Géométrie de position*, dans le sens de CARNOT, correspond à une conception toute différente de celle que je voulais exprimer en tête de mon livre. Je ne parle pas d'autres noms, comme *Géométrie segmentaire* et *Organische Geometrie*, qui répondent à des notions trop particulières, au moins d'après ma manière de voir. Au contraire, la dénomination de *Geometria derivata*, de BELLAVITIS, embrasse un champ plus étendu que le mien.

(2) *Voir* KLEIN, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (*Nachrichten* de Göttingue, 30 août 1871).

du reste, rigoureusement respecté les dénominations généralement employées par les écrivains ([1]).

Dans le développement des matières, je ne me suis pas astreint à suivre exclusivement tel ou tel auteur, j'ai emprunté à tous ce qui me semblait utile à mon but, qui est de faire un livre absolument élémentaire et technique, accessible même à ceux qui n'ont d'autres connaissances que les éléments les plus simples de la Géométrie ordinaire. J'aurais pu, imitant STAUDT, faire complétement abstraction de toute notion préparatoire; mais, dans ce cas, mon travail se serait trop étendu et je n'aurais pu le destiner aux élèves des Instituts techniques, qui ont déjà étudié dans les deux premières années les éléments ordinaires de Mathématiques. Toute la Géométrie traditionnelle n'est pas nécessaire pour comprendre mon livre : il suffit de connaître les propositions fondamentales sur le cercle et sur les triangles semblables.

J'ai dit que le livre doit avoir un caractère technique, il doit donc conduire rapidement les élèves à appliquer les connaissances théoriques au dessin. Dans ce but, j'ai donné aux propriétés *graphiques* le dessus sur les propriétés *métriques;* je me suis attaché aux procédés de la *Geometrie der Lage* de STAUDT plus souvent qu'à ceux de la *Géométrie supérieure* de CHASLES ([2]); je n'ai pas voulu cependant laisser tout à fait de

---

([1]) Par exemple, j'emprunte à STEINER les mots *projectifs* et *perspectifs;* à PONCELET celui d'*homologie;* à BELLAVITIS ceux de *ponctuelle* et de *gerbe* (*stella*), mais dans un sens différent et équivalent à celui de *Strahlenbündel* et non à celui de *Strahlenbüschel* des Allemands; je préfère l'expression de *rapport anharmonique* de CHASLES à celle de *double rapport* de MÖBIUS et STEINER, etc. J'appelle *forme géométrique* une série d'éléments de la même nature (points, droites ou plans) : c'est l'*Elementargebilde* de STAUDT, les *formes géométriques fondamentales* sont les *Grundgebilde* de STEINER, qui se divisent en trois *espèces* ou *stufen*. CHASLES nomme *doubles* les éléments qui coïncident avec leurs correspondants, aussi bien dans l'*involution* que dans les *formes projectives superposées* (divisions homographiques sur une même droite); j'aime mieux suivre l'exemple de ceux qui établissent ici une distinction : je nommerai *doubles* les éléments qui coïncident avec leurs correspondants dans l'*involution*, et *unis* ceux qui coïncident avec leurs correspondants dans les *formes projectives superposées*. La dénomination de *figures corrélatives* est employée dans le sens de CHASLES, et non dans celui de CARNOT.

([2]) *Voir* REYE, *Geometrie der Lage* (Hanovre, 1866), p. XI de la Préface.

côté les propriétés métriques, ce qui aurait nui à d'autres buts pratiques de l'enseignement [1]. J'ai donc introduit dans mon livre l'importante notion du *rapport anharmonique*, ce qui m'a permis, en m'appuyant sur les quelques propositions de la Géométrie ordinaire dont j'ai parlé, d'établir facilement les propriétés métriques les plus utiles qui appartiennent aux figures projectives ou sont intimement liées avec elles.

Je me suis servi de la *projection centrale* pour établir la notion des *éléments à distance infinie* et, suivant l'exemple de Steiner et de Staudt, j'ai placé la loi de la *dualité* tout au commencement du livre, comme un fait logique qui ressort, immédiat et spontané, de la possibilité de construire l'espace à trois dimensions avec l'élément-point ou avec l'élément-plan. Les énoncés et les démonstrations qui se correspondent en vertu de cette loi ont souvent été placés en double colonne; mais quelquefois j'ai abandonné cette disposition pour donner l'occasion aux écoliers de s'exercer à déduire d'un théorème le théorème corrélatif. Dans la préface de son livre, le professeur Reye remarque, avec raison, que rien dans la Géométrie n'est propre à exciter les commençants et à les stimuler vers les recherches propres comme le principe de la dualité; c'est pourquoi il importe beaucoup de leur en donner connaissance le plus tôt possible, et de les habituer à l'employer avec assurance.

L'ordre des matières que j'ai employé est une des nombreuses marches que l'on peut suivre pour les exposer dans un cours de leçons; j'espère cependant être parvenu à faire un livre qui puisse servir même à ceux qui aiment à suivre un ordre différent du mien. Je donnerai quelques exemples. Dès le commencement j'alterne sans distinction les théorèmes de la Géométrie plane avec ceux de la Géométrie de l'espace, parce que l'expérience m'a enseigné, et d'autres l'ont remarqué avant moi [2], que les considérations de l'espace suggèrent

---

(1) *Voir* Zech, *Die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung* (Stuttgard, 1857), Préface.

(2) Bellavitis, *Saggio di Geometria derivata*, p. 247. — Chasles, *Aperçu historique*, etc. (Bruxelles, 1839), p. 191.

bien souvent le moyen de rendre facile et intuitif ce qui serait compliqué et difficile à démontrer par la Géométrie plane; de plus, elles exercent l'intelligence et aident au développement de cette imagination géométrique si utile à l'ingénieur, qui doit pouvoir se représenter les figures dans l'espace sans le secours d'un dessin ou d'un modèle; mais le maître peut croire opportun de s'en tenir strictement, au moins dans les commencements, à la Géométrie plane; il pourra, dans ce cas, sauter sans inconvénient quelques numéros du livre [1], et les exposer plus tard. Je définis les coniques comme projections du cercle, et, après avoir démontré pour cette courbe deux théorèmes fondamentaux [2], je les transporte aux coniques, et puis je développe sur ces dernières toute la théorie des polygones inscrits et circonscrits, celle des pôles et des polaires, sans m'occuper davantage du cas spécial du cercle. On pourrait, au contraire, déduire de ces deux propriétés fondamentales les théorèmes de Pascal, de Brianchon et de Desargues pour le cercle ainsi que la théorie des pôles; et puis, au moyen de la projection ou de l'homologie, appliquer le tout aux coniques. Il est inutile de s'étendre plus longuement sur ce sujet. Dès qu'il se sera assimilé les matières, tout professeur verra lui-même comment il lui convient de les distribuer; il lui arrivera même de modifier d'année en année le mode de coordination suivant les résultats de sa propre expérience.

Tous les numéros de mon livre ne sont pas également importants ou nécessaires dans un cours de leçons. Un maître sagace s'apercevra facilement que les propositions fondamentales sont peu nombreuses et ce sont les seules qui doivent être retenues dans la mémoire; tout le reste se compose de corollaires, de cas particuliers et d'exercices. Il y a une grande liberté de choix parmi ces derniers : les uns pourront être traités à l'école, les autres à la maison; il sera nécessaire, et c'est ici le point capital, que les écoliers trouvent tous les jours eux-mêmes des déductions et des solutions, qu'ils ne

---

(1) Nos 19, 20, 28, 29, 31, 32, 41, 42.
(2) Nos 108, 110.

s'astreignent pas seulement à la partie passive d'écouter et de répéter les choses enseignées par le maître, mais qu'on les fasse concourir activement à la découverte de choses nouvelles. C'est de cette manière et d'aucune autre qu'on réussira à allumer en eux l'amour de l'étude et à les rendre complétement maîtres des théories si fécondes de la Géométrie projective. Il faut veiller enfin à ce que les raisonnements théoriques, pour la démonstration des théorèmes et la déduction des corollaires, soient toujours accompagnés de l'exécution graphique de la solution des problèmes. On peut répéter ici ce que MONGE recommandait pour la Géométrie descriptive (1).

Les Traités magistraux de PONCELET, de STEINER, de CHASLES et de STAUDT (2) sont ceux auxquels je dois le plus, soit parce que tous ceux qui s'adonnent à la Géométrie font leurs premières études dans ces ouvrages, soit parce que je leur ai emprunté, outre la substance des méthodes, les démonstrations de beaucoup de théorèmes et les solutions des problèmes; mais, en même temps que ces ouvrages, j'ai eu à consulter ceux d'APOLLONIUS, de PAPPUS, de DESARGUES, de DE LA HIRE, de NEWTON, de MACLAURIN, de LAMBERT, de CARNOT, de BRIANCHON, de MÖBIUS, de BELLAVITIS..., et ceux plus récents de ZECH, de GASKIN, de WITZSCHELL, de TOWNSEND, de POUDRA, de FIEDLER...

Pour ne pas augmenter les difficultés, déjà assez graves, de mon entreprise, je me suis abstenu de l'obligation de citer continuellement les sources auxquelles j'ai puisé, ou les premiers et véritables auteurs des diverses propositions ou théo-

---

(1) Il est nécessaire, pour le cours de Géométrie descriptive, que la pratique et l'exécution soient jointes à l'audition des méthodes : ainsi les élèves doivent s'exercer aux constructions graphiques... (*Programme de la Géométrie descriptive.*)

(2) PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822). — STEINER, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, etc. (Berlin, 1832). — CHASLES, *Traité de Géométrie supérieure* (Paris, 1852); *Traité des sections coniques* (Paris, 1865).— STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nüremberg, 1847). Je passe sous silence d'autres écrits de ces grands maîtres, ainsi que les œuvres du célèbre PLÜCKER et d'autres géomètres (SEYDEWITZ, GÖPEL, WEISSENBORN, DE JONQUIÈRES, HESSE, PAULUS, SCHRÖTER, GEISER...), parce que je n'ai pas eu occasion d'y recourir dans la composition de ce livre.

ries. Qu'on me pardonne donc si la source citée n'est pas toujours la source primitive (1), ou si telle autre citation manque entièrement. Mes citations ne sont pas fréquentes; j'ai toujours eu pour but principal, en les faisant, de faire connaître aux jeunes gens les noms des grands géomètres et les titres de leurs ouvrages devenus classiques. En attachant aux énoncés de certains théorèmes capitaux les noms illustres d'Euclide, d'Apollonius, de Pappus, de Desargues, de Pascal, de Newton, de Carnot..., j'ai cherché à aider la mémoire à retenir les choses et à exciter cette curiosité scientifique si propre à élargir nos connaissances (2).

Les citations que j'ai faites ont encore un autre but, celui de calmer la peur de ceux que le seul nom de Géométrie projective fait trembler, comme s'il s'agissait de nouveautés inventées par des cerveaux bizarres. Je voudrais faire voir clairement à ceux-là que ces choses sont, pour la plupart, d'une antiquité vénérable et ont été mûries par les esprits des plus illustres penseurs, et réduites désormais à cette simplicité extrême que Gergonne considérait comme le signe de la perfection pour une théorie scientifique (3). Dans ma ~~démon-~~ analyse stration, je procéderai suivant l'ordre des matières contenues dans le livre.

La conception des *éléments à distance infinie* est due au célèbre Desargues qui, il y a plus de deux siècles, considérait explicitement les droites parallèles comme concourant en un point à distance infinie (4), et les plans parallèles comme

---

(1) Pour les auteurs nommés, je cite presque toujours les Traités généralement connus, quoique leurs découvertes aient quelquefois été publiées ailleurs. Les travaux de Chasles sur la théorie des coniques, par exemple, sont en grande partie antérieurs à 1830; ceux de Staudt datent de 1831, etc.

(2) J'ai souvent cité les *Éléments de Mathématiques* de Baltzer, non comme source originale, mais avec l'intention de donner aux jeunes gens le désir d'étudier cet excellent Traité. C'est le meilleur guide qu'ils puissent trouver pour leurs études pendant les quatre années de l'Institut technique.

(3) «... On ne peut se flatter d'avoir le dernier mot d'une théorie, tant qu'on ne peut pas l'expliquer en peu de paroles à un passant dans la rue » (Chasles, *Aperçu historique*, p. 115).

(4) *Œuvres de* Desargues, réunies et analysées par M. Poudra (Paris, 1864), t. I : *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* (1639), p. 104, 105 et 205.

passant par une même droite à l'infini ([1]). La même conception fut mise en pleine lumière par PONCELET qui, comme conséquence des *postulata* de la Géométrie euclidienne, parvint à cette conclusion, que les points de l'espace situés à distance infinie doivent être considérés comme situés tous dans un même plan ([2]).

DESARGUES ([3]) et NEWTON ([4]) ont regardé les asymptotes de l'hyperbole comme des tangentes dont les points de contact sont à distance infinie.

L'*homologie* des figures planes, dont le nom est dû à PONCELET, se trouve dans quelques Traités antérieurs de Perspective, par exemple dans LAMBERT ([5]) ou même dans DESARGUES ([6]) qui a énoncé et démontré le théorème sur les triangles et les quadrilatères perspectifs ou homologiques ; du reste, le théorème sur les triangles (n° 15) coïncide, en substance, avec un célèbre porisme d'EUCLIDE (n° 88) rapporté par PAPPUS ([7]). L'homologie des figures à trois dimensions a été étudiée pour la première fois par PONCELET ([8]).

Comme principe absolu, la loi de la dualité fut énoncée par GERGONNE ([9]), et elle est due à PONCELET ([10]) comme conséquence de la théorie des polaires réciproques (*principe de réciprocité polaire*).

Les formes géométriques (points en ligne droite, faisceaux de droites), hormis les noms, se trouvent dans DESARGUES et dans les géomètres postérieurs. STEINER les a définies de la manière la plus explicite ([11]).

([1]) *Loc. cit.*, p. 105-106.

([2]) *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822, n°s 96 et 580).

([3]) *Loc. cit.*, p. 210.

([4]) *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (1686) liv. I, prop. 27, scol.

([5]) *Freie Perspective*, 2e éd. (Zürich, 1774).

([6]) *Loc. cit.*, p. 413 à 416.

([7]) CHASLES, *Les trois livres des porismes d'Euclide*, etc. (Paris, 1860), p. 102.

([8]) *Loc. cit.*, p. 369 et suiv.

([9]) *Annales de Mathématiques*, t. XVI (Montpellier, 1826), p. 209.

([10]) *Annales de Mathématiques*, t. VIII (Montpellier, 1818), p. 201.

([11]) *Systematische Entwickelung*, p. XIII-XIV.

Carnot [1] a considéré le *quadrilatère complet*, Steiner [2] en a étendu la conception à tous les polygones et aux figures dans l'espace.

La division harmonique a été connue des géomètres de la plus haute antiquité; on en trouve les propriétés fondamentales dans Apollonius [3]; de la Hire [4] donne la construction du quatrième élément d'un groupe harmonique au moyen de la propriété du quadrilatère, c'est-à-dire par le seul usage de la règle.

Dès 1832, Steiner a enseigné les constructions des formes projectives [5]. La théorie complète des rapports anharmoniques est due à Möbius [6]; mais déjà Euclide, Pappus [7], Desargues [8], Brianchon [9] en avaient démontré la proposition fondamentale du n° 53.

Desargues [10] est l'auteur de l'*involution*, dont quelques cas particuliers étaient déjà connus des géomètres grecs [11].

La génération des coniques au moyen de deux formes projectives a été exposée, il y a quarante ans, par Steiner et par Chasles; elle est déterminée par deux théorèmes fondamentaux (n°s 113, 114) d'où l'on déduit toute la doctrine de ces courbes si importantes. La même génération comprend la description organique de Newton [12] et divers théorèmes de Maclaurin.

A seize ans (1640) Pascal a trouvé le fameux théorème de l'*hexagramme mystique* [13], et Brianchon, en 1806, en a dé-

---

(1) *De la corrélation des figures de Géométrie* (Paris, 1801), p. 122.
(2) *Loc. cit.*, p. 72 et 235.
(3) *Conicorum*, lib. I, 34, 36, 37, 38.
(4) *Sectiones conicæ* (Parisiis, 1685), I, 20.
(5) *Loc. cit.*, p. 91.
(6) *Der barycentrische Calcul* (Leipzig, 1827), chap. V.
(7) *Collectiones mathematicæ*, VII, 129.
(8) *Loc. cit.*, p. 425.
(9) *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris, 1817), p. 7.
(10) *Loc. cit.*, p. 119, 147, 171, 176.
(11) Pappus, *Collectiones mathematicæ*, liv. VII, p. 37-56, 127, 128, 130-133.
(12) *Loc. cit.*, liv. I, lemme 21.
(13) *Lettre de* Leibnitz *à M. Périer* dans les *Œuvres de* B. Pascal (édit. Bossut, t. V, p. 459).

duit la proposition corrélative sur l'hexagone au moyen de la théorie des pôles (n° 117).

Les propriétés du quadrilatère formé par quatre tangentes et des quadrangles des points de contact se lisent dans l'appendice latin (*De linearum geometricarum proprietatibus tractatus*), à l'édition anglaise (Londres, 1748) de l'*Algèbre* posthume de Maclaurin, qui en avait déduit la construction d'une conique par points ou par tangentes en plusieurs cas où l'on donne cinq éléments (points ou tangentes). Tous les cas possibles ont été résolus plus tard par Brianchon.

L'idée de considérer deux séries projectives de points sur une même conique est explicitement exposée dans l'*Essai* de Bellavitis (page 270, note).

On doit à Carnot [1] un célèbre théorème (n° 246) au sujet des segments qu'une conique détermine sur les côtés d'un triangle. On connaissait aussi certains cas particuliers de ce théorème bien longtemps avant [2].

On rencontre dans la *Freie Perspective* de Lambert des constructions élégantes pour résoudre quelques problèmes du premier et du second degré au moyen de la règle, en supposant cependant que certains éléments soient donnés, mais la possibilité de résoudre tous les problèmes du second degré au moyen de la règle et d'un cercle fixe a été mise en pleine lumière par Poncelet; puis Steiner, dans un petit livre précieux, l'a développée par la mise en pratique (n° 184).

La théorie des pôles et des polaires était déjà contenue, sous diverses dénominations, dans les ouvrages cités de Desargues [3] et de de la Hire [4]; elle a été perfectionnée par Monge [5], Brianchon [6] et Poncelet. Ce dernier en a tiré la théorie des figures polaires réciproques, qui n'est autre en

---

(1) *Géométrie de position* (Paris, 1803), n° 379.

(2) Apollonius, *Conicorum*, lib. III, p. 16-23. — Desargues, *loc. cit.*, p. 202. — De la Hire, *loc. cit.*, t. V, p. 10, 12. — Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Londres, 1706), p. 4.

(3) *Loc. cit.*, p. 164, 186, 190 et suiv.

(4) *Loc. cit.*, I, 21-28; II, 23-30.

(5) *Géométrie descriptive* (Paris, 1795), n° 40.

(6) *Journal de l'École Polytechnique*, cahier XIII (Paris, 1806).

réalité que la loi de la dualité, nommée par lui *principe de réciprocité polaire.*

Enfin les principales propriétés des diamètres conjugués ont été exposées par APOLLONIUS dans les livres II et VII de son *Traité des coniques.*

Ceux qui voudront acquérir une connaissance plus étendue et plus précise des progrès de la Géométrie depuis son origine jusqu'en 1830 (ce qui est suffisant pour les matières contenues dans ce livre) n'auront qu'à lire l'ouvrage classique, *Aperçu historique,* de M. CHASLES.

L'Ouvrage italien est accompagné d'un Atlas que l'éditeur français a remplacé par des figures gravées sur cuivre et intercalées dans le texte. L'auteur et le traducteur remercient M. Gauthier-Villars des efforts qu'il a faits pour rendre l'édition française des *Éléments de Géométrie projective* digne d'être comparée aux plus beaux ouvrages qui soient sortis de ses presses.

Rome, 5 août 1875.

L'AUTEUR.

Par Cremona

Introduzione ad una teoria geometrica della Curve Piane" 1862" and A Se Continuation

Preliminari di una teoria geometrica delle Superficie

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — Définitions.

1. J'appelle *figure* un complexe quelconque de points, de droites et de plans; il faut concevoir les droites et les plans comme s'étendant à l'infini, sans avoir égard aux portions finies de l'espace qu'ils circonscrivent. Sous le nom de *triangle*, par exemple, il faudra comprendre le système de trois points et des trois droites qui les joignent deux à deux, et un tétraèdre sera le système de quatre plans et des quatre points où ils se coupent trois à trois, etc.

Pour l'uniformité des notations, je désignerai toujours les points par des lettres majuscules A, B, C,..., les droites par les minuscules a, b, c,..., les plans par les lettres grecques α, β, γ,... En outre, AB désignera la droite déterminée par les deux points A et B; Aa sera le plan qui passe par le point A et par la droite a; $a\alpha$ le point commun à la droite a et au plan α; $\alpha\beta$ la droite déterminée par les plans α, β; ABC le plan des trois points A, B, C; $\alpha\beta\gamma$ le point commun aux trois plans α, β, γ; α.BC le point commun au plan α et à la droite BC; A.$\beta\gamma$ le plan passant par le point A et par la droite $\beta\gamma$; α.Bc la droite commune au plan α et au plan Bc; A.βc la droite qui joint le point A au point βc, etc. En écrivant α.BC $\equiv$ A′, j'indiquerai que le point commun au plan α et à la droite BC est le point A′; $u \equiv$ ABC signifiera que la droite u renferme les points A, B, C,..., etc.

2. *Projeter* d'un point fixe O (*centre de projection*) une figure [ABCD..., *abcd*...] composée de points et de droites

signifie construire les droites ou *rayons projetants* OA, OB, OC, OD,... et les plans (*plans projetants*) O*a*, O*b*, O*c*, O*d*,.... On obtient ainsi une nouvelle figure composée de droites et de plans qui passent par le centre O.

3. Couper par un plan fixe σ (*plan transversal*) une figure [$\alpha\beta\gamma\delta$..., *abcd*...] composée de plans et de droites signifie construire les droites ou *traces* $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$,..., et les points ou *traces* σa, σb, σc,.... Il résulte de cette construction une nouvelle figure composée de droites et de points situés dans le plan σ.

4. *Projeter d'une droite fixe s* (*axe*) *une figure* ABCD... composée de points signifie construire les plans *s*A, *s*B, *s*C,.... La nouvelle figure est donc composée de plans passant tous par l'axe *s*.

5. *Couper par une droite fixe s* (*transversale*) une figure $\alpha\beta\gamma\delta$... composée de plans signifie construire les points $s\alpha$, $s\beta$, $s\gamma$,.... La nouvelle figure est donc composée de points alignés sur la transversale fixe *s*.

6. Si une figure est composée des droites *a*, *b*, *c*,... qui passent par un point fixe ou *centre* O, on peut la *projeter* d'une droite ou *axe s* passant par O; il en résulte une figure composée de plans *sa*, *sb*, *sc*,....

7. Si une figure est composée de droites *a*, *b*, *c*,..., toutes situées dans un plan fixe, on peut la couper par une droite (transversale) *s* située dans le même plan; la figure qui en résulte est formée par les points *sa*, *sb*, *sc*,... (¹).

§ II. — Projection centrale.

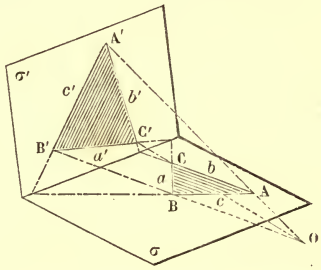
8. *Projeter d'un point* (*centre de projection*) O *sur un plan* (*tableau*) σ' *une figure donnée* ABC..., *abc*..., composée de

(¹) *Projeter* et *couper* sont les deux opérations fondamentales de la Géométrie projective.

points et de droites, signifie projeter (n° 2) la figure d'un point O et puis couper (n° 3) par le plan σ' le complexe des droites et des plans projetants ; cela revient à dire construire les rayons OA, OB, OC,... et les plans Oa, Ob, Oc,..., et ensuite les points σ'OA $\equiv$ A′, σ'OB $\equiv$ B′, σ'OC $\equiv$ C′,... et les droites σ'O$a \equiv a'$, σ'O$b \equiv b'$, σ'O$c \equiv c'$,.... La nouvelle figure formée de ces points et de ces droites, qui se trouvent dans le plan σ', se nomme *image projective* ou *projection* de la figure donnée du centre O sur le tableau σ'.

9. Si, en outre, la figure donnée est plane (*fig.* 1), c'est-à-dire si les points A, B, C,... et les droites a, b, c,... se trouvent dans un même plan σ, il est évident que réciproquement la figure donnée σ est la projection ou l'image perspective de la nouvelle figure σ' du point O sur le tableau σ. C'est pour cela que les deux figures σ et σ' sont nommées *perspectives* (¹). On appelle *correspondants* les points A et A′, B et B′, C et C′,... et *correspondantes* les droites a et a', b et b', c et c',...; en général, une partie de la figure σ et une partie de la figure σ' sont correspondantes, quand l'une est la projection ou l'image de l'autre, c'est-à-dire quand l'une est l'ensemble des points et des droites qui correspondent aux points et aux droites de l'autre.

Fig. 1.



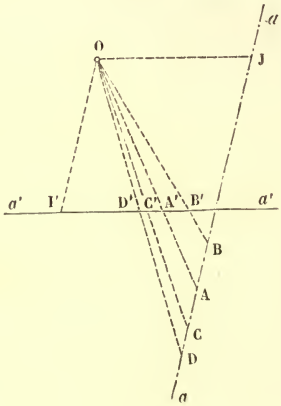
Deux points correspondants, comme A et A′, sont sur un rayon (projetant) qui passe par O; de même, deux droites

(¹) En général, on appelle *perspectives* deux figures telles, qu'aux points A, B, C de l'une correspondent, suivant une même loi, les points A′, B′, C′ de l'autre, et que la position respective des deux figures soit telle, que les droites AA′, BB′, CC′,..., qui joignent les points correspondants, concourent en un même point. Exemples : Les sections faites dans un cône par deux plans, ou par un plan et par une sphère qui passe par le sommet, etc., sont perspectives. (*Voir* aussi BALTZER, *Stéréométrie*, p. 74.)

correspondantes sont dans un même plan (projetant) qui passe par O; il résulte de là que deux droites correspondantes se coupent en un point de la droite commune aux deux plans σ et σ'. Si, dans le plan σ, le point A se trouve sur la droite a, le point A′ correspondant à A se trouvera sur la droite a' correspondant à a dans le plan σ', et réciproquement.

10. Considérons deux droites correspondantes a, a' (*fig.* 2); tout rayon mené par O dans leur plan rencontre a et a' en

Fig. 2.



deux points correspondants, comme A et A′. Si le rayon se meut, en tournant autour de O, les points A et A′ changent simultanément; si le rayon est près de devenir parallèle à a, le point A′ s'approche de I′ (point commun à a' et à la droite passant par O parallèle à a), et le point A s'éloigne sans cesse. Afin que la propriété qu'à un point de a' correspond toujours un point de a subsiste toujours, nous dirons que la droite a a un *point* I *à l'infini*, avec lequel vient coïncider le point A quand A′ coïncide avec I′, c'est-à-dire quand le rayon mobile autour de O devient parallèle à a. La droite a a un seul point à l'infini, parce qu'il ne passe par O qu'un seul rayon parallèle à a.

Le point I′, image du point à l'infini I, est dit *point de fuite* ou *point limite*.

De la même manière, la droite a' a un point J' à l'infini, qui est le correspondant du point J, où a est coupée par le rayon parallèle à a'.

Deux droites parallèles ont le même point à l'infini. Il faut considérer toutes les droites parallèles à une même droite, comme ayant un point commun à l'infini.

Deux droites situées dans un même plan ont toujours un point commun (à distance finie ou infinie).

11. Si maintenant la droite a prend toutes les positions possibles dans le plan σ, la droite correspondante a' sera toujours déterminée par l'intersection des plans σ' et Oa. Quand a se déplace, le rayon OI engendre un plan π parallèle à σ et le point I' décrit la droite $\pi\sigma'$, que nous appellerons i'. Cette droite i' est donc telle que, à un quelconque de ses points, correspond un point à l'infini du plan σ, commun aussi au plan π.

Nous admettrons que la ligne lieu de ces points à l'infini est une droite i, parce qu'elle doit correspondre à la droite i' du plan σ' et doit être l'intersection des plans π, σ; de cette manière, la loi qu'à toute droite de σ' correspond une droite de σ subsistera sans exception.

Le plan σ a une seule droite à l'infini, parce qu'il ne passe qu'un seul plan parallèle à σ par O.

La droite i', image de la droite à l'infini, est dite *droite de fuite* ou *droite limite*.

De même, le plan σ' a une droite à l'infini qui correspond à l'intersection du plan σ par le plan π' mené par O parallèlement à σ'.

Deux plans parallèles ont la même droite à l'infini. Il faut considérer tous les plans parallèles à un même plan comme passant par une droite fixe à l'infini.

Si une droite est parallèle à un plan, la droite à l'infini du plan passe par le point à l'infini de la droite. Si deux droites sont parallèles, elles rencontrent en un même point la droite à l'infini du plan qu'elles déterminent.

Deux plans se coupent toujours suivant une droite (à distance finie ou infinie).

Une droite et un plan (qui ne passe pas par la droite) se rencontrent toujours en un point (à distance finie ou infinie).

Trois plans qui ne passent pas par une même droite ont toujours un point commun (à distance finie ou infinie).

12. Si deux figures planes ABC,..., A′B′C′,..., situées dans des plans différents σ, σ', sont perspectives, ou bien si les rayons AA′, BB′, CC′,... concourent en un point O, les droites correspondantes AB et A′B′, AC et A′C′,..., BC et B′C′,... se coupent en des points situés sur une même droite qui est l'intersection des plans des deux figures. Ceci résulte déjà du n° 9.

Si M est un point de la droite $\sigma\sigma'$, et si une droite a de σ passe par M, la droite correspondante a' passera aussi par M; en effet, les deux droites a et a' sont les intersections d'un même plan projetant avec les plans σ, σ'; par suite, elles concourent au point commun aux trois plans.

La droite $\sigma\sigma'$ est le lieu des points qui sont à eux-mêmes leurs correspondants. La droite limite i', du plan σ', est parallèle à $\sigma\sigma'$, car i' et la droite correspondante, qui est tout entière à l'infini dans σ, doivent se couper sur $\sigma\sigma'$. De même, la droite limite j du plan σ est parallèle à $\sigma\sigma'$.

13. Réciproquement, si aux points A, B, C,... et aux droites AB, AC,..., BC,... d'une figure plane σ correspondent, dans le même ordre, les points A′, B′, C′,... et les droites A′B′, A′C′,..., B′C′ d'une autre figure plane σ' (¹), de manière que les droites correspondantes AB et A′B′, AC et A′C′,..., BC et B′C′,... se coupent en des points situés en ligne droite (la droite $\sigma\sigma'$), les deux figures sont perspectives.

En effet, soit O le point commun aux trois plans AB.A′B′, AC.A′C′, BC.B′C′; les trois arêtes AA′, BB′, CC′ du trièdre formé par les mêmes plans iront concourir en O. De même, les trois plans AB.A′B′, AD.A′D′, BD.B′D′ se couperont en un point commun aux arêtes AA′, BB′, DD′, et ce point est en-

(¹) Les plans σ_1, σ' sont supposés distincts entre eux.

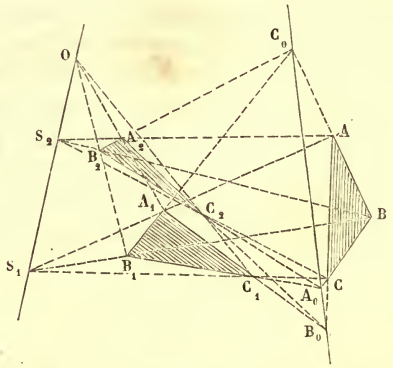
core O, puisque les deux droites AA′, BB′ suffisent pour le déterminer. Donc les droites AA′, BB′, CC′, DD′,... passent toutes par un même point O; ou bien les deux figures proposées sont *perspectives*, et O est leur centre de projection.

14. Théorème. — *Si deux triangles sont perspectifs* (¹) *les intersections des côtés correspondants sont en ligne droite.*

Si les triangles sont dans des plans différents σ, σ', le théorème rentre dans une proposition déjà démontrée (n° 12).

Supposons, en second lieu, que les deux triangles donnés $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ soient dans un même plan σ (*fig.* 3). Du

Fig. 3.



point O, commun aux droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, menons en dehors du plan σ une droite quelconque sur laquelle nous prendrons deux points S_1, S_2. Projetons le triangle $A_1B_1C_1$ de S_1 et le triangle $A_2B_2C_2$ de S_2. Les points A_1, A_2, O, S_1, S_2 sont dans un même plan; donc S_1A_1, et S_2A_2 se rencontrent, etc. Soient A, B, C les points où se coupent entre elles les droites S_1A_1 et S_2A_2, S_1B_1 et S_2B_2, S_1C_1 et S_2C_2; le triangle ABC sera perspectif à $A_1B_1C_1$ aussi bien qu'à $A_2B_2C_2$. Les droites BC, B_1C_1, B_2C_2 se coupent deux à deux et, par suite, concourent

(¹) *Voir* la note du n° 9.

en un même point A_0 [1]; de même CA, $C_1 A_1$, $C_2 A_2$ concourent en un point B_0 et AB, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ en un point C_0. Les trois points A_0, B_0, C_0 sont situés sur la droite commune au plan σ et au plan ABC. Le théorème est donc démontré.

15. Théorème. — *Si deux triangles* $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ *jouissent de la propriété que les côtés* $B_1 C_1$ *et* $B_2 C_2$, $C_1 A_1$ *et* $C_2 A_2$, $A_1 B_1$ *et* $A_2 B_2$ *se coupent en trois points* A_0, B_0, C_0 *en ligne droite, les deux triangles sont perspectifs.*

Si les deux triangles donnés sont dans des plans différents, le théorème rentre dans une propriété déjà démontrée (n° 13).

Si les deux triangles sont dans un même plan σ (*fig.* 3), menons un autre plan par la droite $A_0 B_0 C_0$ et projetons-y le triangle $A_1 B_1 C_1$ d'un centre arbitraire S_1. Si la projection est ABC, les droites BC, $B_1 C_1$ se couperont au point A_0, par lequel passe aussi $B_2 C_2$; de même CA passera par B_0 et AB par C_0. Les droites AA_2, BB_2, CC_2 se coupent deux à deux, sans se trouver cependant toutes les trois dans un même plan; par suite, elles concourent en un point S_2. Les droites $S_1 S_2$, $A_1 A_2$ sont dans un même plan, parce que $S_1 A_1$, $S_2 A_2$ se coupent en A; donc $S_1 S_2$ coupe $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, c'est-à-dire que $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ concourent au point O commun au plan σ et à la droite $S_1 S_2$ [2].

§ III. — Homologie.

16. Reprenons la considération des n°s 9, 10, 11 et imaginons que, la figure σ' restant invariable et fixe dans son plan, on fasse tourner celui-ci autour de la droite $\sigma\sigma'$ [3], jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan σ. Les deux figures σ, σ' se trou-

---

[1] BC est l'intersection des plans $S_1 B_1 C_1$, $S_2 B_2 C_2$, qui ne se confondent pas; ce qui revient à dire que les droites $B C_1$, $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ ne sont pas toutes les trois dans un même plan. Le point où la droite BC rencontre le plan de $B_1 C_1$ et $B_2 C_2$ sera, par conséquent, commun à ces trois droites.

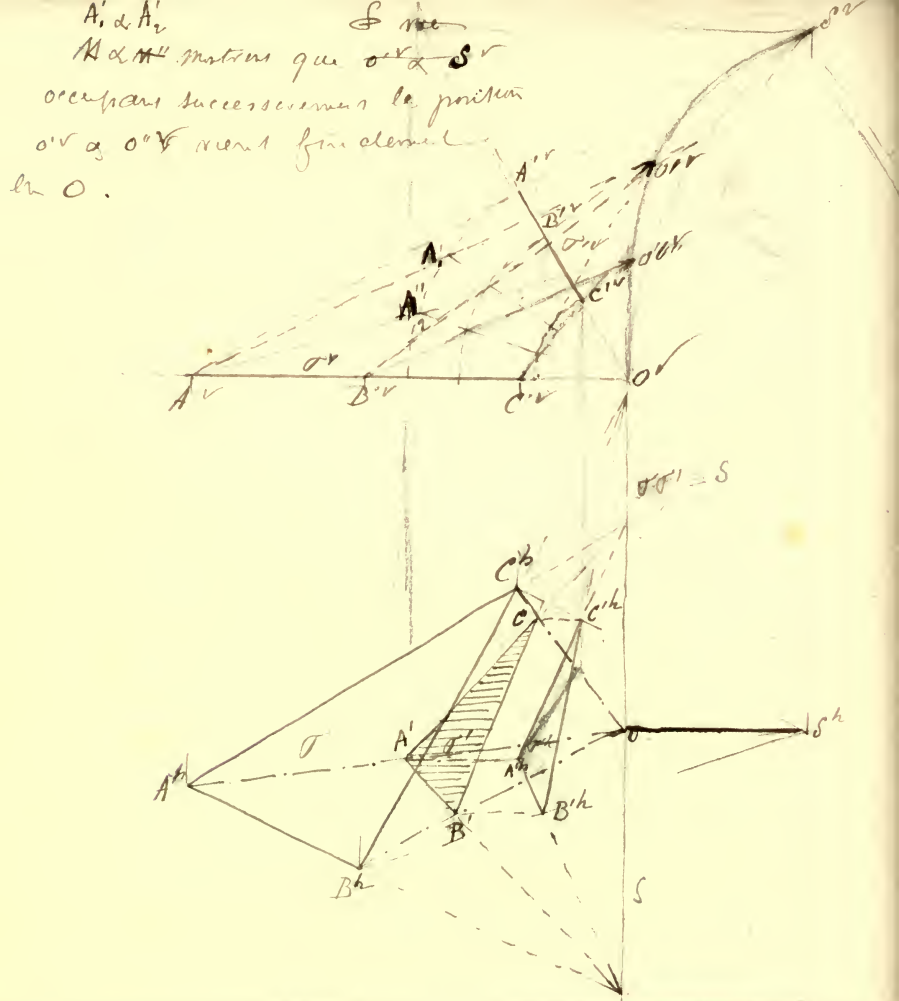
[2] Baltzer, *Stéréom.*, p. 7476. Le théorème des n°s 12 et 13 est dû à Desargues.

[3] Pendant cette rotation les deux figures restent perspectives et le centre de projection décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à $\sigma\sigma'$ et dont le centre est sur la droite limite de σ. *Voir* Baltzer, *Stéréom.*, p. 79.

17. Théorème. — *Si aux droites a, b, c,... et aux points ab, ac,..., bc,... d'une figure correspondent, dans le même ordre, les droites a', b', c',... et les points $a'b'$, $a'c'$,..., $b'c'$,... d'une autre figure située dans le même plan que la première, de manière que les couples des points correspondants ab, $a'b'$, ac, $a'c'$, bc, $b'c'$,... soient alignés sur un même point fixe* O, *je dis que les droites correspondantes a et a', b et b', c et c',... se coupent en des points situés en ligne droite.*

---

(1) *Voir* Baltzer, *Stéréom.*, p. 77. La dénomination est due à Poncelet.



nons que, la figure σ' restant invariable et fixe dans son plan, on fasse tourner celui-ci autour de la droite $\sigma\sigma'$ (³), jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan σ. Les deux figures σ, σ' se trou-

---

(¹) BC est l'intersection des plans $S_1 B_1 C_1$, $S_2 B_2 C_2$, qui ne se confondent pas; ce qui revient à dire que les droites $B C_1$, $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ ne sont pas toutes les trois dans un même plan. Le point où la droite BC rencontre le plan de $B_1 C_1$ et $B_2 C_2$ sera, par conséquent, commun à ces trois droites.

(²) Baltzer, *Stéréom.*, p. 7476. Le théorème des nos 12 et 13 est dû à Desargues.

(³) Pendant cette rotation les deux figures restent perspectives et le centre de projection décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à $\sigma\sigma'$ et dont le centre est sur la droite limite de σ. *Voir* Baltzer, *Stéréom.*, p. 79.

veront alors dans un même plan. Les couples de droites correspondantes, comme a et a', b et b',... se couperont encore sur une même droite fixe $\sigma\sigma'$, car celle-ci est restée immobile pendant la rotation du plan σ'. A quelle loi seront soumises les droites AA′, BB′, CC′,... qui joignent les couples de points correspondants des deux figures arrivées dans un même plan? Je dis qu'elles concourront toujours en un point O.

En effet, soient A et A′, B et B′, C et C′ trois couples de points correspondants; ils forment deux triangles ABC, A′B′C′ dont les couples de côtés BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′ se coupent en trois points en ligne droite. Par suite (n° 15), les rayons AA′, BB′, CC′ concourent en un point O; mais il suffit de deux rayons AA′, BB′ pour déterminer ce point; donc, de quelque manière que l'on choisisse le troisième couple de points C, C′, le rayon CC′ passera toujours par O.

Deux figures σ, σ' composées de cette manière, qui ne sont autre chose que deux figures perspectives dont les plans ont été amenés l'un sur l'autre, se nomment aussi *figures homologiques* (1). Le point O, sur lequel sont alignés les couples de points correspondants, est dit *centre d'homologie* ou *centre de collinéation;* et la droite $\sigma\sigma'$, sur laquelle se coupent les couples de droites correspondantes, est dite *axe d'homologie* ou *de collinéation.* Chacune des deux figures a une droite limite: c'est la droite qui correspond à l'infini de l'autre figure. Les deux droites limites sont parallèles à l'axe d'homologie (n° 12).

17. Théorème. — *Si aux droites a, b, c,... et aux points ab, ac,..., bc,... d'une figure correspondent, dans le même ordre, les droites a', b', c',... et les points $a'b'$, $a'c'$,..., $b'c'$,... d'une autre figure située dans le même plan que la première, de manière que les couples des points correspondants ab, $a'b'$, ac, $a'c'$, bc, $b'c'$,... soient alignés sur un même point fixe* O, *je dis que les droites correspondantes a et a', b et b', c et c',... se coupent en des points situés en ligne droite.*

---

(1) *Voir* Baltzer, *Stéréom.*, p. 77. La dénomination est due à Poncelet.

Démonstration. — Soient, en effet, a et a', b et b', c et c' trois couples de droites correspondantes; comme, par hypothèse, les droites qui joignent les sommets correspondants des triangles abc, $a'b'c'$ concourent en un point O, il en résulte (n° 14) que les côtés correspondants a et a', b et b', c et c' se couperont en trois points en ligne droite; mais il suffit de deux points aa', bb' pour déterminer cette droite; elle reste donc la même si, au lieu de c et c', on considère deux autres droites correspondantes quelconques. Donc deux droites correspondantes se coupent toujours sur une droite fixe, que nous désignerons par s.

Il résulte de là que, si l'on imagine les deux figures tracées sur deux plans superposés et non sur un seul et même plan et si, l'un des plans restant fixe, on fait tourner l'autre autour de s, on obtiendra deux figures qui sont exactement dans les conditions supposées au n° 13, c'est-à-dire deux figures perspectives.

Observons, en outre, que les considérations du n° 16 forment la démonstration du théorème qui suit :

Si deux figures sont dans un même plan et si, aux points A, B, C,... *et aux droites* AB, AC,..., BC,... *de l'une correspondent, dans le même ordre, les points* A′, B′, C′,... *et les droites* A′B′, A′C′,..., B′C′,... *de l'autre, de manière que deux droites correspondantes se coupent toujours sur une droite fixe, les deux figures sont perspectives, c'est-à-dire que les rayons* AA′, BB′, CC′,... *concourent en un point fixe.*

18. *Exercice.* — Étant donnés le centre O et l'axe d'homologie s, et, en outre, deux points correspondants A et A′ (alignés sur O), construire la figure homologique d'une figure donnée.

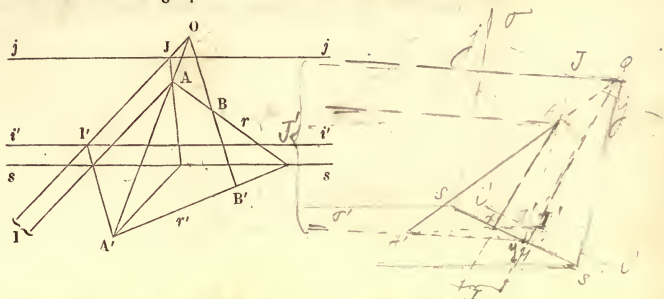
Prenons un autre point B de la figure donnée (*fig.* 4). Pour obtenir le point correspondant B′, il faut remarquer que le rayon BB′ doit passer par O et que les droites correspondantes AB, A′B′ doivent se couper sur s; donc B′ sera le point commun à OB et à la droite qui joint A′ à l'intersection de AB avec s [1]. On peut construire de la même manière

---

[1] Cette construction montre que, si B tombe sur s, B′ coïncide avec B; c'est-à-dire que tout point de s est à lui-même son correspondant.

autant de couples de points correspondants que l'on veut; et pour tracer la droite r', qui correspond à une droite donnée r, il suffit de trou-

Fig. 4.



ver le point B', correspondant à un point B de r, et de joindre B' au point rs.

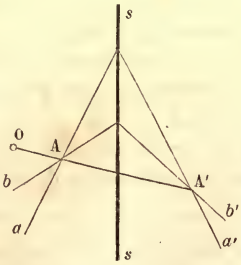
Pour trouver le point I' correspondant au point à l'infini I d'une droite donnée, d'un rayon issu de O, par exemple, on répétera la construction donnée ci-dessus pour le point B'; c'est-à-dire que I' sera le point commun au rayon donné OI et à la droite qui joint A' au point d'intersection de s avec la droite AI (ou la parallèle à OI, menée par A).

Tous les points analogues à I' (correspondant aux points à l'infini de la figure donnée) tombent sur une droite i', parallèle à s; i' est la droite limite de la seconde figure.

Si dans la construction précédente on change, l'un dans l'autre, les points A, A', on obtiendra un point J de la droite limite j de la première figure.

Supposons qu'au lieu de deux points correspondants A, A' (*fig.* 5) on

Fig. 5.

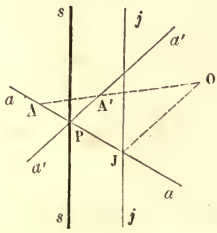


donne deux droites correspondantes a, a' (qui se coupent sur s). Tout rayon mené par O les coupera en deux points correspondants. Pour

obtenir la droite b', qui correspond à une droite b de la première figure, il suffit de joindre le point bs au point d'intersection de a' et du rayon qui passe par O et par ab (¹).

Les données du problème peuvent être (*fig.* 6) le centre O, l'axe s,

Fig. 6.



et la droite limite j de la première figure. Alors, si une droite a de la première figure coupe j en J et s en P, la droite correspondante a' passera par P et sera parallèle à OJ.

Pour trouver le point A' correspondant à un point donné A, il faut tracer la droite a', correspondant à une droite a, menée arbitrairement par A; on prendra ensuite l'intersection de a' avec OA.

Adoptons la construction que nous venons de donner des figures homologiques, et soient encore O le centre, s l'axe d'homologie et j la droite limite de la première figure.

Soit donné un cercle dans la première figure (*fig.* 7, 8 et 9); à ce cercle correspond, dans la seconde figure, une courbe C' que nous pouvons construire en déterminant, par la méthode ci-dessus, les points et les droites qui correspondent aux points et aux tangentes de C.

Deux points correspondants M, M' des deux courbes seront toujours en ligne droite avec O; et deux cordes correspondantes (c'est-à-dire les droites MN, M'N', qui joignent deux couples de points correspondants) se couperont toujours sur s; et, comme cas particulier (²), deux tangentes m, m' correspondantes (tangentes en deux points correspondants M, M') iront concourir en un point de s.

Il résulte clairement de là que la courbe C' jouit, comme le cercle, des deux propriétés suivantes : 1° toute droite de son plan la coupe en deux

(¹) D'où il suit que, si a passe par O, a' coïncide avec a, c'est-à-dire toute droite passant par O est à elle-même sa correspondante.

(²) La tangente en M est considérée comme la droite qui passe par M et par le point infiniment voisin de la courbe. BALTZER, *Planimétrie*, p. 41.

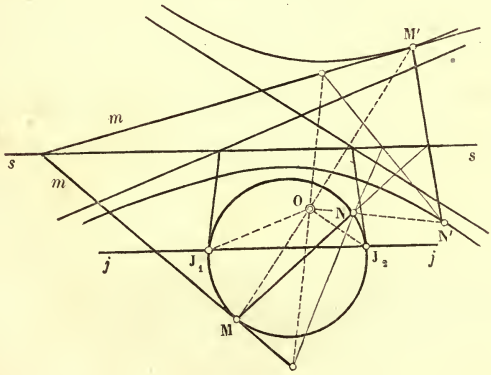
points, ou lui est tangente en un point, ou n'a aucun point commun avec elle; 2° par un point quelconque du plan on peut mener deux tangentes à la courbe, ou une seule (si le point est sur la courbe), ou aucune.

Comme deux figures homologiques peuvent être considérées comme provenant de la superposition de deux plans perspectifs (n° 17), la courbe C′ n'est pas autre chose que la section faite dans un cône oblique, à base circulaire, par un plan quelconque. Ce cône est formé par les droites qui, d'un point quelconque de l'espace, projettent les points d'un cercle. C'est pour cela que la courbe C′ est nommée *section conique* ou simplement *conique;* donc *la courbe homologique à un cercle est une conique.*

Les points de la droite j correspondent aux points à l'infini de la seconde figure. Or le cercle C peut couper j en deux points J_1, J_2 ou toucher j en un point J, ou n'avoir avec j aucun point commun.

Dans le premier cas (*fig.* 7), la courbe C′ aura deux points J'_1, J'_2, à

Fig. 7.

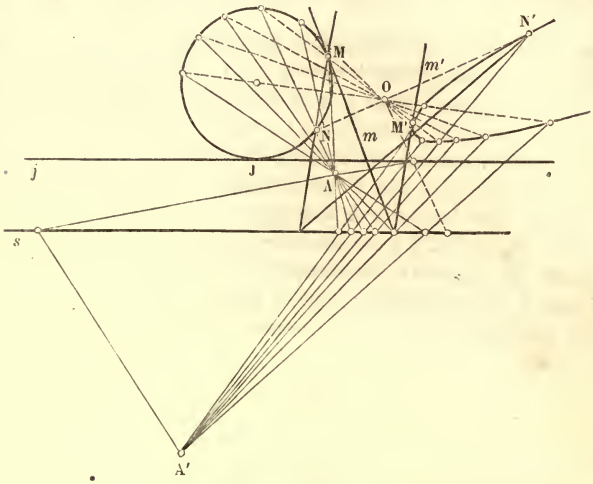


distance infinie, situés sur la direction des droites OJ_1, OJ_2. Aux deux droites, qui sont tangentes au cercle en J_1 et en J_2, correspondront deux droites (respectivement parallèles à OJ_1, OJ_2) qu'il faut considérer comme tangentes à la courbe C′ en ses points à l'infini J'_1, J'_2. Ces deux tangentes, dont les points de contact sont à l'infini, sont appelées *asymptotes* de la courbe C′, à laquelle on donne le nom d'*hyperbole*.

Dans le second cas (*fig.* 8), la courbe C′ a un seul point J′ à l'infini; il doit être considéré comme le point de contact de la droite à l'infini j', qui est la tangente à C′, correspondant à la tangente j au cercle en J. Cette courbe C′ se nomme *parabole*.

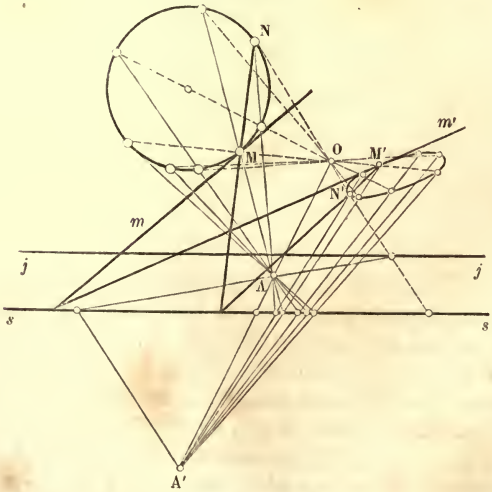
Dans le troisième cas (*fig.* 9), la courbe C′ n'a plus aucun point à l'infini et est nommée *ellipse*.

Fig. 8.



On démontre de la même manière que, si dans la première figure une

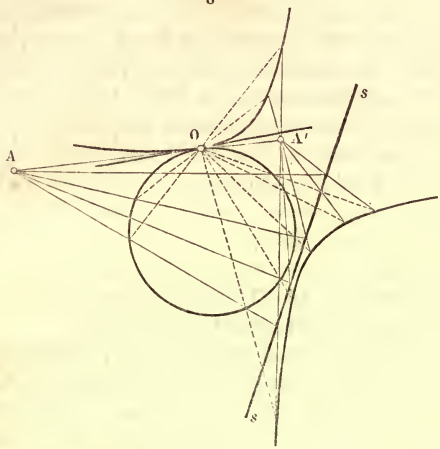
Fig. 9.



conique C est donnée, la courbe correspondante C′, dans l'autre figure, sera aussi une conique.

Le centre d'homologie est un point qui se correspond à lui-même, et tout rayon passant par ce centre est à lui-même son correspondant. Donc, si une courbe C passe par O (*fig.* 10), la courbe correspondante C′ passera aussi par O, et les deux courbes auront la même tangente en ce point.

Fig. 10.



De même, tout point de l'axe d'homologie est à lui-même son correspondant; donc, si une courbe de la première figure touche *s* en un point, la courbe correspondante de la seconde figure sera aussi tangente à *s* en ce même point, etc.

Remarquons deux cas particuliers :

1° L'axe *s* d'homologie peut être tout entier à l'infini; alors deux droites correspondantes sont toujours parallèles, ou, ce qui revient au même, deux angles correspondants sont toujours égaux. Dans ce cas, on dit que les deux figures sont *semblables et semblablement placées*, ou encore *homothétiques*, et que le point O est le *centre de similitude* ou *centre d'homothétie*. Dans deux figures homothétiques, un cercle correspond toujours à un cercle.

2° Le point O, au contraire, peut être à distance infinie; alors les droites qui joignent des couples de points correspondants sont parallèles à une direction fixe. Dans ce cas, les figures sont dites *homologiques par affinité* [1], et la droite *s axe d'affinité*. A un point à l'infini correspond un point à l'infini, et la droite à l'infini se correspond à elle-même. Il résulte de là qu'à une ellipse correspond une ellipse, à une hyperbole une hyperbole, à une parabole une parabole, à un parallélogramme un parallélogramme.

---

[1] Baltzer, *Stéréom.*, p. 79.

§ IV. — Figures homologiques a trois dimensions.

19. Supposons maintenant que l'on ait une figure composée de points, plans et droites, placés d'une manière quelconque dans l'espace, à trois dimensions; on en fait la *perspective-relief* (ce problème peut se présenter dans la construction des bas-reliefs et des décorations théatrales) de la manière suivante. On prend un point O de l'espace, comme centre de perspective ou d'*homologie;* un plan π d'*homologie,* dont chaque point devra être l'image de lui-même et, en outre, un point A′, qui sera l'image d'un point donné A de la figure objective, de manière que AA′ passe par O. Alors, soit B un autre point quelconque; pour obtenir son image B′, menons le plan OAB, et opérons dans ce plan comme s'il s'agissait de construire deux figures homologiques, dont O serait le centre, la droite, commune aux plans OAB et π l'axe, et A, A′ deux points correspondants. Le point B′ sera l'intersection de OB avec la droite passant par A′, et par l'intersection du plan π et de la droite AB (n° 18).

Soit C un troisième point; son image C′ sera l'intersection de OC par A′D ou par B′E, où D, E sont les points de rencontre du plan π avec AC, BC. Le point C′ est le même dans les deux cas; en effet, les couples de droites OA′ et CE, OB′ et CD, A′B′ et DE concourent en trois points A, B, J d'une droite : donc (n° 15) les droites OC, A′E, B′D auront un point commun C′.

Ce procédé donnera, pour chaque point de la figure donnée, le point correspondant de l'image, et deux points correspondants seront toujours alignés sur le point fixe O. Tout plan σ, mené par O, coupe les deux figures solides (la figure donnée et son image), suivant deux figures homologiques, pour lesquelles O est le centre, et la droite $\sigma\pi$ l'axe d'homologie. Il résulte de là qu'à toute droite de la figure donnée correspond une droite dans l'image, et que deux droites correspondantes sont toujours dans un plan passant par O et se rencontrent en un point du plan π.

Je dis de plus qu'à tout plan α appartenant à la figure donnée, et ne passant pas par O, correspondra aussi un plan dans l'image. En effet, aux droites a, b, c,... du plan α correspondent autant de droites a', b', c',...; et aux points ab, ac,..., bc les points $a'b'$, a', c',..., $b'c'$,.... En d'autres termes, les droites a', b', c',... sont telles qu'elles se coupent deux à deux, sans avoir cependant un point commun à toutes; donc elles sont dans un même plan α' [1].

---

[1] En effet, comme c' coupe a' et b' sans passer par le point $a'b'$, c' a deux points communs avec le plan $a'b'$: donc c' est tout entière dans le plan $a'b'$,....

Deux plans correspondants α, α' se coupent sur le plan π. En effet, tous les points et toutes les droites de ce plan se correspondent à eux-mêmes; donc la droite $\alpha'\pi$ coïncide avec la droite $\alpha\pi$.

Les deux plans α, α' constituent évidemment deux figures perspectives (comme les plans σ, σ' des n°s 9 et 11).

Il existe dans tout plan σ, passant par O, une droite limite i', qui est l'image de la droite à l'infini du même plan. Les droites limites de deux plans σ_1, σ_2 ont un point commun, qui est l'image du point à l'infini de la droite $\sigma_1\sigma_2$. Les droites limites de tous les plans σ sont donc telles qu'elles se coupent deux à deux : et comme elles ne passent pas toutes par un même point (parce que les plans par O ne passent pas tous par une même droite), elles doivent se trouver toutes dans un même plan φ'.

Ce plan φ', qu'on peut appeler *plan de fuite* ou *plan limite*, est parallèle au plan π, car toutes les droites limites des plans σ sont parallèles au même plan π.

Le plan limite φ' est donc le lieu des droites correspondant aux droites à l'infini de tous les plans de l'espace, et, par suite, aussi le lieu des points à l'infini de toutes les droites de l'espace : en effet, la droite à l'infini d'un plan quelconque α n'est autre chose que la droite à l'infini du plan parallèle à α et passant par O; de même aussi le point à l'infini d'une droite quelconque a coïncide avec le point à l'infini de la droite parallèle à a, menée par O.

20. Les points à l'infini de tout l'espace à trois dimensions sont donc tels que leurs images sont les points d'un seul et même plan φ' (le plan de fuite). Il est donc naturel de considérer tous les points à l'infini de l'espace comme situés dans un même plan φ (le plan à l'infini), qui a pour image le plan φ' (1).

La notion du plan à l'infini φ étant admise, le point à l'infini d'une droite quelconque a n'est autre que le point $a\varphi$, et la droite à l'infini d'un plan quelconque α n'est autre que la droite $\alpha\varphi$. Deux droites sont parallèles si elles se coupent en un point du plan φ; deux plans sont parallèles si leur droite d'intersection est dans le plan φ, etc.

§ V. — Formes géométriques.

21. Nommons :

Droite ponctuelle ou *ponctuelle* une figure A, B, C,... formée de points alignés sur une droite : telle est, par exemple, la figure qui résulte des opérations des n°s 5 et 7;

(1) Baltzer, *Stéréom.*, p. 81.

Faisceau de plans une figure α, β, γ,... formée de plans passant tous par une même droite (*axe du faisceau*) : telle est la figure qui résulte des opérations n°s 4 et 6;

Faisceau de rayons une figure a, b, c,... formée de droites situées dans un même plan et issues d'un point fixe (*centre du faisceau*) : telle serait la figure que l'on obtiendrait en appliquant l'opération du n° 2 à une ponctuelle ou celle du n° 3 à un faisceau de plans;

Système plan (*plan ponctuel ou plan réglé*) une figure formée de points et de droites situés dans un même plan : telle est la figure qui résulte de l'opération du n° 3;

Gerbe une figure composée de droites et de plans qui passent par un point fixe (*centre de la gerbe*), comme celle qui résulte de l'opération du n° 2.

22. Les trois premières figures peuvent se déduire l'une de l'autre par une projection ou une section. En effet [1] :

D'une ponctuelle A, B, C,... on tire un faisceau de plans s(A, B, C,...), en la projetant d'un axe s (n° 4); on en tire, au contraire, un faisceau de rayons O(A, B, C,...) en la projetant d'un centre O (n° 2).

D'un faisceau de plans α, β, γ,... on tire la ponctuelle $s(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, en coupant le faisceau par une transversale s (n° 5); on trouve, au contraire, un faisceau de rayons $\sigma(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, en coupant le faisceau donné par un plan transversal σ (n° 3).

D'un faisceau de rayons a, b, c,... on déduit la ponctuelle $\sigma(a, b, c, \ldots)$, en le coupant par un plan transversal σ (n° 3); on obtient, au contraire, un faisceau de plans O(a, b, c,...), en projetant le faisceau donné d'un centre O (n° 2).

23. De la même manière, les deux dernières figures du n° 21 se déduisent l'une de l'autre, au moyen d'une des opéra-

---

[1] Nous désignons par s(A, B, C,...) la série des plans sA, sB, sC,...; par O(A, B, C,...) la série des rayons OA, OB, OC,...; par $s(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ la série des points $s\alpha$, $s\beta$, $s\gamma$,...; par $\sigma(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ la série des droites $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$,.... Nous nous servirons indifféremment des symboles A, B, C,..., ABC... pour désigner les séries de points A, B, C, ...

tions (nos 2, 3); en effet, si l'on projette, d'un centre O, un plan ponctuel ou réglé, on obtient une gerbe; et, réciproquement, si l'on coupe une gerbe par un plan transversal, on obtient un plan ponctuel ou réglé. Deux figures planes projectives (no 9) sont deux sections d'une même gerbe.

24. Les *éléments* de la ponctuelle sont les points; ceux du faisceau de plans, les plans; ceux du faisceau de rayons, les droites ou rayons.

Dans le système plan, on peut considérer comme éléments les points aussi bien que les droites. En considérant les points comme éléments, les droites du plan ponctuel sont autant de ponctuelles; si, au contraire, on considère les droites (rayons) comme éléments, les points du plan réglé sont les centres d'autant de faisceaux de rayons.

Le plan ponctuel (où les éléments sont les points) contient donc une infinité de ponctuelles [1], et le plan réglé (dont les éléments sont les rayons) contient une infinité de rayons [2].

Dans la gerbe on peut considérer comme éléments les plans aussi bien que les droites ou rayons. En prenant comme éléments les plans, les droites de la gerbe sont les axes d'autant de faisceaux de plans; au contraire, si l'on considère les droites comme éléments, les plans de la gerbe sont autant de faisceaux de rayons.

La gerbe contient donc une infinité de faisceaux de plans ou une infinité de faisceaux de rayons, suivant que l'on considère comme éléments les plans ou les droites.

25. L'espace à trois dimensions (qu'il soit étendu à l'infini, ou que ce soit une portion limitée de l'espace infini) peut aussi être considéré comme une figure *géométrique*, dont les éléments sont les points ou les plans.

En prenant les points comme éléments, les droites de l'espace sont autant de ponctuelles et les plans de l'espace

---

(1) Une d'elles a tous ses points à distance infinie, chacune des autres a un seul point à l'infini (nos 10 et 11).

(2) La droite à l'infini appartient à une infinité de faisceaux de rayons, dont chacun a son centre à l'infini et a tous ses rayons parallèles, par conséquent.

autant de plans ponctuels. Au contraire, si l'on considère les plans comme éléments, les droites de l'espace sont les axes d'autant de faisceaux de plans et les points de l'espace sont les centres d'autant de gerbes. L'espace renferme donc une infinité de plans ponctuels [1] ou une infinité de gerbes [2], suivant que l'on prend comme éléments pour le construire le point ou le plan.

26. Les trois premières figures, c'est-à-dire la ponctuelle, le faisceau de plans et le faisceau de rayons, qui jouissent de la propriété de pouvoir se déduire l'une de l'autre au moyen d'une des opérations (nos 2, 3,...), sont réunies sous une même dénomination, celle de *formes géométriques fondamentales de première espèce.*

La quatrième figure et la cinquième, c'est-à-dire le plan ponctuel ou réglé et la gerbe, qui se déduisent également l'une de l'autre au moyen d'une des opérations (nos 2, 3) et qui ont, en outre, la propriété de renfermer en elles une infinité de formes fondamentales de première espèce, sont appelées *formes géométriques fondamentales de deuxième espèce.*

L'espace qui renferme en soi une infinité de formes de deuxième espèce est considéré comme *forme fondamentale de troisième espèce.*

Il y a donc six formes géométriques fondamentales, trois de première espèce, deux de deuxième et une de troisième espèce.

§ VI. — Principe de dualité.

27. La Géométrie, en général, étudie la génération et les propriétés des figures contenues : 1° dans l'espace à trois dimensions; 2° dans un plan; 3° dans une gerbe. Dans les trois cas, la figure considérée n'est autre chose qu'un complexe d'éléments, ou, ce qui revient au même, le complexe des positions successives occupées par un élément mobile ou variable. L'élément mobile qui engendre les figures peut être

---

(1) Un d'eux est tout entier à distance infinie.

(2) Parmi lesquelles il y en a une infinité qui ont leur centre à distance infinie et dont, par conséquent, les rayons sont parallèles.

dans le premier cas le point ou le plan, dans le deuxième le point ou la droite, dans le troisième le plan ou la droite. Il y a donc toujours deux modes *corrélatifs ou réciproques* de génération des figures et de déduction de leurs propriétés, et c'est en cela que consiste la *dualité géométrique* qui est la coexistence deux à deux des figures (et par suite de leurs propriétés), deux figures coexistantes (*corrélatives ou réciproques*) ayant la même genèse et ne différant entre elles que par la nature de l'élément générateur.

Dans la Géométrie de l'espace à trois dimensions, la ponctuelle et le faisceau de plans, le plan ponctuel et la gerbe considérés comme formés de plans, le plan réglé et la gerbe considérés comme formés de rayons, sont des formes corrélatives. Le faisceau de rayons est une forme corrélative à elle-même.

Dans la Géométrie du plan, la ponctuelle et le faisceau de rayons sont des formes corrélatives.

Dans la Géométrie de la gerbe, le faisceau de plans et le faisceau de rayons sont des formes corrélatives.

La Géométrie du plan et la Géométrie de la gerbe, considérées dans l'espace à trois dimensions, sont corrélatives entre elles.

28. Voici quelques exemples de propositions corrélatives de la Géométrie de l'espace. Deux propositions corrélatives se déduisent l'une de l'autre par le remplacement des éléments *point* et *plan*.

1° Deux points A, B déterminent une droite (la droite AB, qui passe par les points donnés) qui contient une infinité d'autres points.

2° Une droite a et un point B, non situé sur la droite, déterminent un plan, le plan aB qui joint la droite au point.

3° Trois points A, B, C, non situés en ligne droite, déterminent un plan : le plan ABC qui passe par les trois points.

4° Deux droites qui ont un point commun sont dans un même plan.

Deux plans α, β déterminent une droite (la droite $\alpha\beta$, intersection des plans donnés) par laquelle passent une infinité d'autres plans.

Une droite a et un plan β, ne passant pas par la droite, déterminent un point, le point $a\beta$ où la droite coupe le plan.

Trois plans α, β, γ, qui ne passent pas par une même droite, déterminent un point : le point $\alpha\beta\gamma$, où les trois plans se coupent.

Deux droites tracées dans un même plan ont un point commun.

5° Étant donnés quatre points A, B, C, D, si les droites AB, CD se coupent, les quatre points sont dans un même plan; par suite, les droites BC et AD, CA et BD, se coupent aussi.

Étant donnés quatre plans α, β, γ, δ, si les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ se coupent, les quatre plans concourent en un même point; par suite, les droites $\beta\gamma$ et $\alpha\delta$, $\gamma\alpha$ et $\beta\delta$ se coupent aussi.

6° Si autant de droites que l'on veut se coupent deux à deux, et ne passent pas toutes par un même point, elles sont toutes dans un même plan (droites d'un plan réglé) (1).

Si autant de droites que l'on veut se coupent deux à deux, et ne sont pas toutes dans un même plan, elles passent toutes par un même point (droites d'une gerbe) (2).

7° Le problème suivant : « Par un point A, donné dans un plan α, tracer dans ce plan une droite qui coupe une droite donnée r (qui ne se trouve pas dans α et ne passe pas par A », admet deux solutions corrélatives :

On joint le point A au point $r\alpha$.

On construit l'intersection du plan α et du plan rA.

8° Problème. — Par un point donné A, mener une droite qui coupe deux droites données b, c (non situées dans un même plan et ne passant pas par A).

Problème. — Dans un plan donné α, tracer une droite qui coupe deux droites données b, c (qui n'ont pas un point commun, et ne sont pas situées dans le plan α).

Solution. — On construit l'intersection des plans Ab, Ac.

Solution. — On joint le point αb au point αc.

29. Dans la Géométrie à trois dimensions, la figure corrélative d'un *triangle* (système de trois points) est un *trièdre* (système de trois plans) : le sommet, les faces, les arêtes du trièdre sont corrélatifs au plan, aux sommets, aux côtés du triangle; d'où il suit que le théorème corrélatif à celui du n° 15 sera celui-ci :

Si deux trièdres $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ jouissent de la propriété que les arêtes $\beta'\gamma'$ et $\beta''\gamma''$, et $\gamma'\alpha'$ et $\gamma''\alpha''$, $\alpha'\beta'$ et $\alpha''\beta''$ se trouvent dans trois plans α_0, β_0, γ_0, qui passent par une même droite, les droites $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ sont situées dans un même plan.

La démonstration est la même qu'au n° 15, en changeant entre eux les éléments point et plan. Par exemple, si les deux trièdres ont des som-

(1) *Voir* la note du n° 19.

(2) Soient, en effet, les droites $a, b, c\ldots$; comme ab, ac, bc sont trois plans distincts, leur point commun est le point de concours des droites $a, b, c, \ldots$.

mets différents S′, S″, les points où se coupent les couples d'arêtes sont les sommets d'un triangle dont les côtés sont $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$; ces dernières droites sont donc dans un même plan (celui du triangle).

De même aussi, dans le cas où les deux trièdres ont le même sommet S, la démonstration sera corrélative à celle du cas analogue de deux triangles A′B′C′, A″B″C″ (situées dans un même plan) du n° 15. Le théorème peut aussi s'établir en projetant d'un point S la figure qui exprime le théorème du n° 14.

L'élève studieux peut se proposer, comme exercice, la démonstration du théorème corrélatif à celui du n° 14, qui peut s'énoncer ainsi :

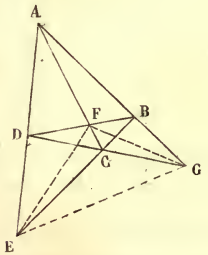
Si deux trièdres $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ sont tels que les droites $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ sont dans un même plan, les couples de côtés $\beta'\gamma'$ et $\beta''\gamma''$, $\gamma'\alpha'$ et $\gamma''\alpha''$, $\alpha'\beta'$ et $\alpha''\beta''$ déterminent trois plans qui passent par une même droite.

30. Dans la Géométrie plane, deux figures ou deux propositions corrélatives se déduisent l'une de l'autre par l'échange des éléments *point* et *droite*. En voici quelques exemples (¹) :

1° Deux points A, B déterminent une droite, la droite AB.

2° Quatre points A, B, C, D (*fig.* 11),

Fig. 11.

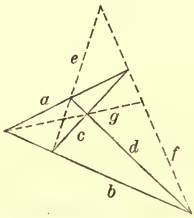


dont trois ne sont pas sur une ligne droite, constituent une figure, que l'on nomme *quadrangle complet*. On appelle *sommets* du quadrangle les quatre points ci-dessus, et *côtés* du même quadrangle les six droites qui les joignent deux à deux.

Deux droites a, b déterminent un point, le point ab.

Quatre droites a, b, c, d (*fig.* 12),

Fig. 12.



dont trois quelconques ne concourent pas en un même point, constituent une figure que l'on nomme *quadrilatère complet*. Les quatre droites sont appelées *côtés* du quadrilatère complet, et ses *sommets* sont les six points où les côtés se

(¹) Il est bien entendu que les points et les droites dont il s'agira se trouvent dans un même plan.

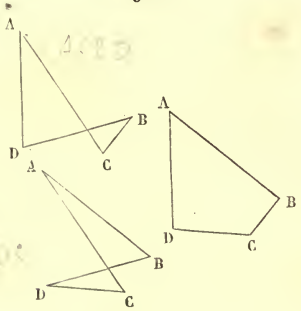
quadrangle
4 sommets
6 côtés

quadrilatère
4 côtés
6 sommets

Deux côtés qui ne passent pas par un même sommet sont dits *opposés;* il y a donc trois couples de côtés opposés, BC et AD, CA et BD, AB et CD. Les points E, F, G, où concourent les côtés opposés, sont nommés *points diagonaux;* et le triangle EFG est nommé *triangle diagonal* du quadrangle complet.

Le quadrangle complet comprend trois quadrangles ou quadrilatères simples ACBD, ABCD, ABDC (*fig.* 13).

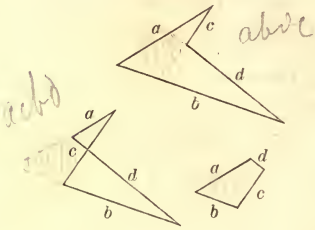
Fig. 13.



coupent deux à deux. Deux sommets qui ne se trouvent pas sur un même côté sont dits *opposés*. Il y a donc trois couples de sommets opposés, *bc* et *ad*, *ca* et *bd*, *ab* et *cd*. Les droites *e*, *f*, *g*, qui joignent les sommets opposés, sont les *droites diagonales;* et le triangle *efg* est nommé *triangle diagonal* du quadrilatère complet.

Le quadrilatère complet comprend trois quadrilatères ou quadrangles simples *acbd*, *abcd*, *abdc* (*fig.* 14).

Fig. 14.



3° En général :

Un *polygone* (*n-gone*) complet est le système de *n* points ou *sommets*, considérés avec les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites ou côtés qui les joignent deux à deux.

Un *multilatère* (*n-latère*) complet est le système de *n* droites ou *côtés*, considérés avec les $\frac{n(n-1)}{2}$ points ou *sommets* où ils se coupent deux à deux.

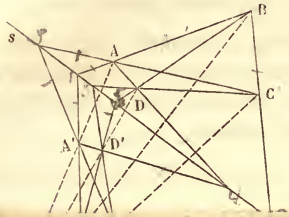
4° Les théorèmes du n° 14 et du n° 15, où les deux triangles sont supposés situés dans un même plan, sont corrélatifs entre eux.

5° Si deux quadrangles complets ABCD, A′B′C′D′ jouissent de la propriété que les côtés AB et A′B′, BC et B′C′, CA et C′A′, AD et A′D′, BD et B′D′, se coupent en cinq points d'une droite *s*, les deux cô-

Si deux quadrilatères complets *abcd*, *a′b′c′d′* jouissent de la propriété que les couples de sommets *ab* et *a′b′*, *bc* et *b′c′*, *ca* et *c′a′*, *ad* et *a′d′*, *bd* et *b′d′* se trouvent sur cinq droites concourant en

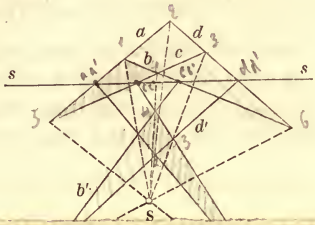
tés restants CD et C′D′ se couperont aussi sur S (*fig.* 15).

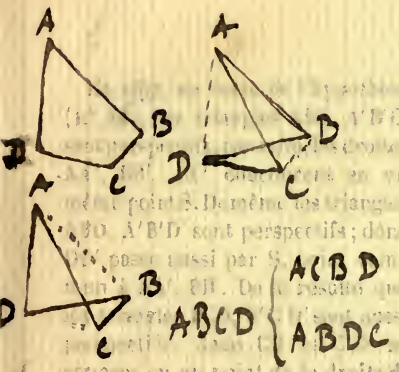
Fig. 15.

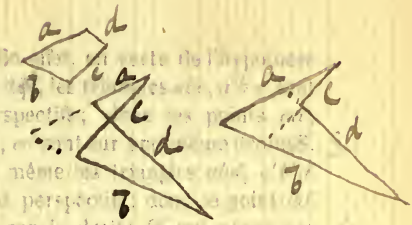


un point S, les deux sommets restants cd et $c'd'$ seront aussi alignés sur S (*fig.* 16).

Fig. 16.







BC et à B′C′, et par le point commun à BD et à B′D′ ; ce qu'il fallait démontrer (¹).

et par la droite $(ba)(b'a')$, ce qu'il fallait démontrer.

31. Dans la Géométrie de l'espace, un angle polyèdre complet à n faces, c'est-à-dire la figure composée de n plans (faces), concourant en un même point (sommet de l'angle polyèdre), considérés avec les $\frac{n(n-1)}{2}$

(¹) Ces deux théorèmes sont donnés ici comme exemples pour la Géométrie plane, mais dans le cas où les deux quadrangles ou quadrilatères sont dans des plans différents, les démonstrations sont encore les mêmes mot-à mot.

droites (arêtes), suivant lesquelles les plans se coupent deux à deux, est corrélatif à un polygone (plan) complet de n sommets. Et un angle multarête complet, à n arêtes, c'est-à-dire la figure composée de n droites issues d'un même point (sommet de l'angle multarête), considérées avec les $\frac{n(n-1)}{2}$ plans (faces), déterminés par les droites, prises deux à deux, est corrélatif à un multilatère (plan) complet de n côtés.

Par exemple, les théorèmes suivants sont corrélatifs, dans la Géométrie à trois dimensions, aux deux théorèmes qui précèdent (n° 30, 5°), qui sont corrélatifs entre eux dans la Géométrie plane.

Si deux angles tétraèdres complets (de même sommet ou non) $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, jouissent de la propriété que cinq couples d'arêtes correspondantes se trouvent dans cinq plans passant par une droite s, le sixième couple d'arêtes sera aussi dans un plan passant par s.

Si deux angles quadrarêtes complets (de même sommet ou non) $abcd$, $a'b'c'd'$, jouissent de la propriété que cinq couples de faces correspondantes se coupent suivant cinq droites situées dans un plan σ, la droite commune au sixième couple de faces sera aussi dans le plan σ.

Nous laisserons à l'élève studieux le soin de trouver les démonstrations de ces théorèmes, qui ne diffèrent, du reste, de celles du théorème 5° que par le changement des éléments point et plan ; et, de même que les théorèmes 5° sont une conséquence des théorèmes n°s 12 et 13, de même les théorèmes actuels se fondent sur ceux du n° 29.

Si les deux angles tétraèdres ont un même sommet O, le théorème de gauche peut aussi s'établir, en projetant du point O (n° 2) la figure qui exprime le théorème 5° de droite. Dans la même hypothèse on tire, par le même procédé, le théorème actuel de droite du théorème 5° de gauche.

32. Dans la géométrie de la gerbe, deux propositions ou deux figures corrélatives se déduisent l'une de l'autre par l'échange des éléments plan et droite. De même que la géométrie de la gerbe est corrélative à celle du plan, par rapport à l'espace à trois dimensions, de même l'une des géométries se déduit de l'autre, par l'échange des éléments point et plan. La géométrie de la gerbe peut aussi se déduire de celle du plan, en faisant la projection à partir d'un centre (n° 2).

De la géométrie de la gerbe on déduit celle des figures sphériques, en coupant la gerbe par une sphère passant par le centre de la gerbe.

§ VII. — Formes projectives.

33. Au moyen de la projection, à partir d'un centre, on déduit un faisceau de rayons d'une ponctuelle, un faisceau de plans d'un faisceau de rayons, une gerbe d'un plan (ponctuel ou réglé). Réciproquement, au moyen d'une section par un plan transversal, on revient du faisceau de rayons à la ponctuelle, du faisceau de plans au faisceau de rayons, de la gerbe au plan. Les deux opérations, projeter d'un centre, couper par un plan transversal, peuvent donc être regardées comme *complémentaires;* et nous dirons que, si une forme est déduite d'une autre par une de ces opérations, on peut réciproquement, par l'opération complémentaire, déduire la seconde forme de la première.

Supposons maintenant que d'une forme f_1 on déduise par une opération (projection ou section) une forme f_2, que de f_2 on déduise f_3 par une autre opération, qu'une troisième opération tire f_4 de f_3; et ainsi de suite jusqu'à ce que $n-1$ opérations aient donné une forme f_n. *Vice versa*, nous pourrons revenir de f_n à f_1 au moyen d'une autre série de $n-1$ opérations qui, suivant l'ordre, seront complémentaires de la dernière, de la pénultième, de l'antépénultième,... des opérations qui ont servi à passer de f_1 à f_n. La série des opérations qui conduisent de f_1 à f_n, et celle des opérations qui ramènent de f_n à f_1 peuvent être appelées complémentaires, et les opérations d'une des séries sont respectivement complémentaires de celles de l'autre, prises en sens inverse.

Dans ce qui précède, on suppose les formes géométriques dans l'espace à trois dimensions (n° 25). Si nous voulions nous en tenir à la Géométrie plane, les opérations complémentaires se réduiraient à projeter d'un centre et à couper par une droite transversale. Dans la géométrie de la gerbe, couper par un plan et projeter d'un axe sont les opérations complémentaires.

34. Deux formes fondamentales de la même espèce sont dites *projectives* quand l'une peut se déduire de l'autre

moyennant un nombre fini quelconque de projections et de sections (nos 2, 3,..., 7). Par exemple, si l'on a une ponctuelle u, et si on la projette d'un centre O, on obtient un faisceau de rayons; que l'on projette celui-ci d'un autre centre O′, de manière qu'il en résulte un faisceau de plans ayant OO′ pour axe, que l'on coupe ce faisceau par une droite u_2, que l'on projette la ponctuelle u_2 d'un axe et que l'on coupe le faisceau de plans qui en résulte par un plan, ce qui donnera un faisceau de rayons, etc., deux quelconques des formes géométriques de première espèce ainsi obtenues sont projectives par définition.

Quand on dit qu'une forme A, B, C, D,... est projective à une autre forme A′, B′, C′, D′,..., on veut entendre que, moyennant une même série d'opérations (projections ou sections), A′ provient de A, B′ de B, C′ de C, etc.

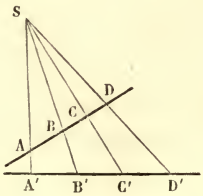
Les éléments A et A′, B et B′, C et C′,... sont appelés *correspondants*.

35. D'après ce qui précède, il est facile de voir que deux formes projectives à une troisième sont projectives entre elles. En effet, en faisant d'abord les opérations qui servent à passer de la première à la troisième forme, puis celles par lesquelles on passe de la troisième à la deuxième, on aura effectué le passage de la première à la deuxième forme.

36. On appelle *perspectives* ou *perspectifs* :

Deux ponctuelles (*fig.* 17), si elles sont des sections d'un même faisceau de rayons (*voir* n° 9);

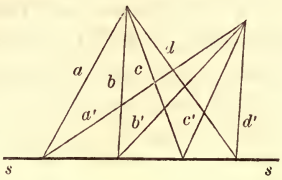
Fig. 17.



Deux faisceaux de rayons (*fig.* 18), s'ils projettent une

même ponctuelle de deux centres différents, ou s'ils sont des sections d'un même faisceau de plans [1];

Fig. 18.



Deux faisceaux de plans, s'ils projettent un même faisceau de rayons de deux centres différents;

Une ponctuelle et un faisceau de rayons ou un faisceau de rayons et un faisceau de plans, si la première forme est une section de la seconde;

Deux plans, s'ils sont des sections d'une même gerbe;

Deux gerbes, si elles projettent un même plan de deux centres différents;

Un plan et une gerbe, si le plan est une section de la gerbe.

De la définition du n° 34 il résulte immédiatement que deux formes perspectives sont aussi projectives; mais deux formes projectives ne sont généralement pas placées en position perspective.

n° 26

37. Deux formes géométriques de première espèce com-

---

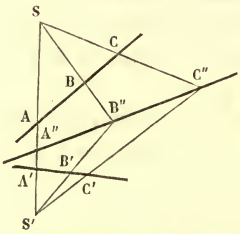
[1] Si l'on projette une ponctuelle $u \equiv ABC...$ de deux centres différents O et O', non situés dans un même plan avec la ponctuelle, on obtient deux faisceaux (perspectifs) de rayons qui sont, en outre, des sections faites par les plans transversaux Ou, $O'u'$ dans un même faisceau de plans ayant pour axe la droite OO' et composé des plans OO'A, OO'B, OO'C,.... C'est là le cas général de deux faisceaux perspectifs de rayons : ils n'ont pas le même centre et sont dans des plans différents; et, en même temps, ils projettent une même ponctuelle et sont sections d'un même faisceau de plans. Il se présente deux cas particuliers : 1° Si l'on projette la ponctuelle u de deux centres O et O' situés dans un même plan avec u, alors les deux faisceaux de rayons sont dans un même plan et, par suite, ne sont plus des sections d'un faisceau de plans; 2° si un faisceau de plans est coupé par deux plans transversaux passant par un même point O de l'axe, on obtient deux faisceaux de rayons qui ont le même centre O et ne projettent plus, par suite, une même ponctuelle.

posées chacune de trois éléments sont toujours projectives. Pour démontrer cette assertion, j'observe avant tout qu'il suffit de considérer le cas de deux ponctuelles ABC, A′B′C′; car, si une des formes proposées est un faisceau, on peut lui substituer une de ses sections par une transversale.

Si les deux droites ABC, A′B′C′ ne sont pas dans un même plan, menons les droites AA′, BB′, CC′ et coupons-les par une transversale s [1]. Alors les deux formes données ne seront autre chose que deux sections du faisceau de plans sAA′, sBB′, sCC′.

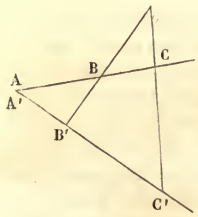
Si les deux droites sont dans un même plan (*fig.* 19), pre-

Fig. 19.



nons sur la droite AA′ deux points S, S′, et soient B″ l'intersection de SB et de S′B′; C″ l'intersection de SC avec S′C′; A″ l'intersection de SS′ avec B″C″. Alors A″B″C″ sera une projection de ABC aussi bien que de A′B′C′ vues respectivement des centres S, S′.

Fig. 20.



Dans le cas où les points A et A′ coïncident (*fig.* 20), les deux

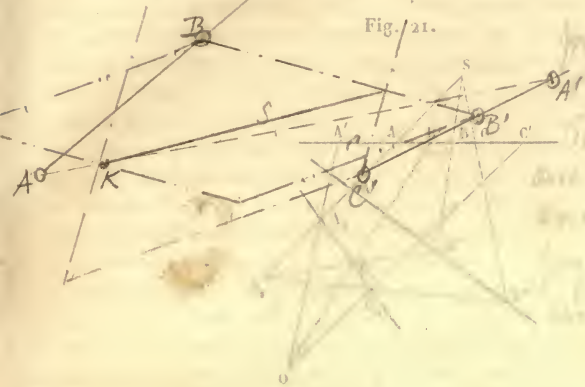
---

[1] Pour cela il suffit de mener par un point quelconque de AA′ une droite qui rencontre BB′ et CC′. (*Voir* le problème 8° au n° 28.)

formes données sont directement perspectives; le centre de projection est le point commun à BB′, CC′.

Enfin, si les deux ternes de points ABC, A′B′C′ (*fig.* 21)

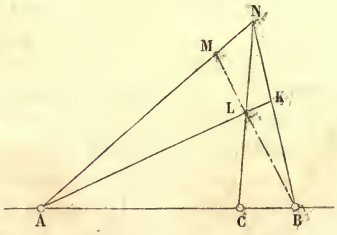
Fig. 21.



sont sur une même droite, il suffirait de projeter l'un des ternes A′B′C′ sur une autre droite $A_1B_1C_1$, et l'on retomberait sur un des cas déjà considérés.

Par exemple, si l'on veut projeter ABC en BAC (*fig.* 22), il

Fig. 22.



suffit de prendre au hasard deux points L, N alignés sur C. Soient alors K le point de concours de AL et BN, M celui de BL, AN; LNC sera une projection de ABC à partir du centre K et BAC une projection de LNC à partir du centre M.

Si l'on voulait projeter ABC en BCA on, pourrait projeter d'abord ABC en BAC, puis BAC en BCA.

§ VIII. — Formes harmoniques.

38. Théorème [1]. — Si trois points A, B, C sont donnés sur une droite s, et si l'on construit le quadrangle complet (KLMN), de manière que deux côtés opposés (KL, MN) concourent en A ; que deux autres côtés opposés (KN, ML) concourent en B, et que le cinquième côté (LA) passe par C, le sixième côté (KM) coupera la droite s en un point D, qui est déterminé par les trois points donnés, c'est-à-dire qui ne change pas, de quelque manière qu'on fasse varier les éléments arbitraires du quadrangle (*fig.* 23).

Démonstration. En effet, si l'on construit un second quadrangle complet (K'L'M'N') qui satisfasse aux conditions prescrites, les deux quadrangles auront cinq paires de côtés correspondants qui concourent sur la droite donnée ; donc la sixième paire concourra aussi sur la même droite (n° 30, 5°, à gauche).

Il résulte de là que si l'on maintient le premier quadrangle fixe, et si l'on fait varier le second, de toutes les manières possibles, le point D restera fixe, c. q. f. d.

Les quatre points ABCD sont nommés *harmoniques,* ou bien l'on dit que la forme géométrique constituée par ces quatre points est *harmonique.*

Cela revient à dire : *quatre points* ABCD *d'une droite, considérés dans*

Si trois droites données a, b, c (dans un plan) concourent en un point S, et si l'on construit un quadrilatère complet ($klmn$), de manière que deux sommets opposés (kl, mn) tombent sur a, que deux autres sommets opposés (kn, ml) tombent sur b, et le cinquième sommet (ln) sur c, le sixième sommet (km) tombera sur une droite d, passant par le point S, et déterminée, c'est-à-dire, qui ne change pas, de quelque manière qu'on fasse varier les éléments arbitraires du quadrilatère (*fig.* 24).

En effet, si l'on construit un second quadrilatère complet ($k'l'm'n'$) qui satisfasse aux conditions prescrites, les deux quadrilatères auront cinq paires de sommets correspondants, alignés sur le point donné ; donc la sixième paire sera en ligne droite avec ce même point (n° 30, 5°, à droite).

Il résulte de là que si l'on maintient le premier quadrilatère fixe, et si l'on fait varier le second, de toutes les manières possibles, la droite d restera fixe, c. q. f. d.

Les quatre droites (ou les quatre rayons) $abcd$ sont nommés *harmoniques,* ou bien l'on dit que la forme géométrique constituée par ces quatre droites est *harmonique.*

Cela revient à dire : *quatre rayons* $abcd$ *d'un faisceau, considérés dans*

---

[1] Staudt, *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847), n° 93.

l'ordre où ils sont énoncés, sont dits harmoniques, s'il est possible de construire un quadrangle complet, tel que deux côtés opposés passent par A, *deux autres côtés opposés par* B, *le cinquième par* C, *le sixième par* D. Il résulte du théorème qui précède que si un tel quadrangle existe, c'est-à-dire si la forme ABCD est harmonique, on peut construire une infinité d'autres quadrangles satisfaisant aux mêmes conditions. Il en résulte, en outre, que trois points ABC étant donnés en ligne droite (et étant donné l'ordre dans lequel il faut les considérer), le quatrième point D qui, avec eux, constitue une forme harmonique, est *déterminé* et *unique*, et s'obtient par la construction d'un des quadrangles (n° 50).

l'ordre où ils sont énoncés, sont dits harmoniques, s'il est possible de construire un quadrilatère complet, tel que deux sommets opposés tombent sur a, deux autres sommets opposés sur b, le cinquième sur c et le sixième sur d. Il résulte du théorème qui précède que si un tel quadrilatère existe, c'est-à-dire si la forme *abcd* est harmonique, on peut construire une infinité d'autres quadrilatères satisfaisant aux mêmes conditions. Il en résulte, en outre, que trois rayons *abc* d'un faisceau étant donnés (et étant donné l'ordre dans lequel il faut les considérer), le quatrième rayon *d* qui, avec eux, constitue une forme harmonique, est *déterminé* et *unique*, et s'obtient par la construction d'un des quadrilatères (n° 50).

Fig. 23.

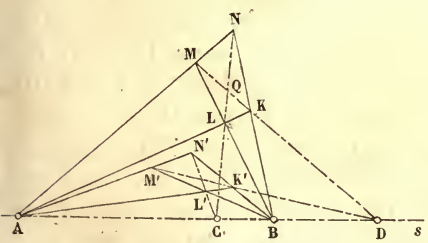
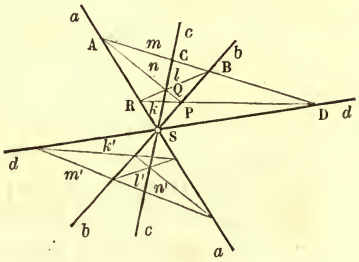


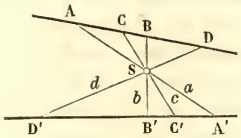
Fig. 24.



39. Si l'on projette d'un point S les points harmoniques ABCD sur une autre droite, les projections A'B'C'D' seront encore quatre points harmoniques (*fig.* 25). En effet, imaginons deux plans menés respectivement par les deux droites AB, A'B' et supposons construit dans le premier plan un quadrangle complet dont deux côtés opposés concourent en A, deux autres côtés opposés en B, et dont le cinquième côté passe en C; alors le sixième côté passera en D (n° 38), parce

que la forme ABCD est harmonique par hypothèse. Projetons maintenant du point S ce quadrangle sur le second plan; nous

Fig. 25.



obtiendrons un nouveau quadrangle dont deux côtés opposés se coupent en A', deux autres côtés opposés en B' et dont le cinquième et le sixième côté passent respectivement par C' et D'; donc A'B'C'D' est une forme harmonique.

40. L'examen de la *fig.* 24 montre que les rayons harmoniques a, b, c, d sont coupés par une transversale quelconque, par m par exemple, en quatre points ABCD qui sont harmoniques. En effet, le quadrangle PQRS est tel que deux de ses côtés opposés (a, n) se coupent en A, deux autres de ses côtés opposés (b, l) se coupent en B, pendant que le cinquième côté (c) et le sixième (a) passent respectivement par C et D.

Réciproquement, supposons que la forme harmonique ABCD (*fig.* 24) soit donnée et prenons arbitrairement le centre de projection S. Je dis que les quatre rayons projetants S(A, B, C, D) sont harmoniques. En effet, menons à volonté par A une droite qui coupe SB en P, SC en Q, puis traçons BQ qui coupe AS en R. Dans le quadrangle PQRS, deux côtés opposés concourent en A, deux autres côtés opposés concourent en B, et le cinquième côté passe par C : donc le sixième côté doit passer par D (n° 38, à gauche), puisque la forme ABCD est harmonique par hypothèse. Mais alors nous avons un quadrilatère complet *klmn* qui a deux sommets opposés A, R sur SA, deux autres sommets opposés B, P sur SB, un cinquième sommet Q sur SC et le sixième sommet D sur SD; donc (n° 38, à droite) les quatre droites qui, à partir de S, projettent ABCD sont harmoniques. D'où :

Quatre rayons harmoniques sont coupés par une transversale quelconque en quatre points harmoniques, et réciproquement

les rayons qui projettent quatre points harmoniques d'un centre quelconque sont harmoniques.

41. Le théorème du n° 38 à droite est corrélatif (dans la Géométrie plane) à celui qui l'accompagne à gauche, dans lequel on suppose tous les quadrangles situés dans un même plan. D'après ce qui précède, le théorème du n° 38, à gauche, est encore vrai, et a la même démonstration, si les quadrangles sont construits dans des plans différents.

Considérant donc ce dernier théorème comme une proposition de Géométrie de l'espace à trois dimensions, le théorème corrélatif sera le suivant :

Si trois plans donnés α, β, γ passent par une même droite s, et si l'on construit un angle tétraèdre $\kappa\lambda\mu\nu$ complet, dont deux arêtes opposées $\kappa\lambda$, $\mu\nu$ soient dans le plan α, deux autres arêtes opposées $\kappa\nu$, $\lambda\mu$ dans le plan β et l'arête $\lambda\nu$ dans γ, la sixième arête $\kappa\mu$ se trouvera toujours dans un plan déterminé δ, qui ne change pas, de quelque manière que l'on fasse varier les éléments arbitraires de l'angle tétraèdre.

En effet, si (à partir du même ou d'un autre sommet) on construit un autre angle tétraèdre complet, qui satisfasse aux conditions prescrites, les deux angles tétraèdres auront cinq couples d'arêtes correspondantes situés dans des plans qui passent par une même droite s : donc (n° 31, à gauche) le sixième couple se trouvera aussi dans un plan passant par la droite s.

Nous nommerons les quatre plans α, β, γ, δ *plans harmoniques*, ou bien nous dirons que la forme qu'ils constituent est *harmonique*.

42. En coupant l'angle tétraèdre $\kappa\lambda\mu\nu$ par un plan quelconque, ne passant pas par le sommet, on obtient un quadrilatère complet; et le même plan transversal coupe les plans α, β, γ, δ suivant quatre rayons a, b, c, d d'un faisceau dont les deux premiers contiennent deux couples de sommets du quadrilatère pendant que les deux autres passent respectivement par les deux autres sommets. Donc (n° 38, à droite) quatre plans harmoniques α, β, γ, δ sont coupés par un plan transversal suivant quatre droites harmoniques.

De même aussi, si les quatre plans harmoniques α, β, γ, δ sont coupés par une transversale en quatre points A, B, C, D, la forme ABCD est harmonique. En effet, menons un plan par la transversale, il coupera les plans α, β, γ, δ suivant des droites a, b, c, d. Ces droites sont harmoniques, comme nous venons de le démontrer; mais ABCD est une section du faisceau $abcd$; donc (n° 40) A, B, C, D sont quatre points harmoniques.

43. Donc, si nous comprenons sous la dénomination de *forme harmonique* soit le groupe de quatre points harmoniques, soit celui de quatre droites harmoniques, soit enfin celui de quatre plans harmoniques, nous aurons le théorème :

Toute projection ou section d'une forme harmonique est une forme harmonique. Ou bien :

Toute forme projective à une forme harmonique est aussi une forme harmonique.

Réciproquement, *deux formes harmoniques sont toujours projectives.* Pour démontrer cette propriété, il suffit de considérer deux groupes de quatre points; car, si l'une des formes était un faisceau, on obtiendrait quatre points harmoniques en le coupant par une transversale. Supposons donc que ABCD, A′B′C′D′ soient deux formes harmoniques, projetons ABC sur A′B′C′ de la manière qui est expliquée au n° 37; les mêmes opérations (projections et sections) qui servent à déduire A′B′C′ de ABC donneront pour D un point D_1; d'où il résulte que la forme A′B′C′D_1 sera harmonique comme l'est ABCD. Mais A′B′C′D′ sont aussi quatre points harmoniques, par hypothèse; donc D_1 coïncide avec D′, puisque les trois points A′B′C′ déterminent le quatrième point qui, avec eux doit donner une forme harmonique (n° 38 à gauche) : c'est ce qu'il fallait démontrer.

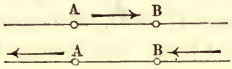
Ajoutons ici une conséquence des définitions données (nos 41 et 42) :

La forme corrélative à une forme harmonique est aussi une forme harmonique.

44. Si a, b, c, d sont les rayons d'un faisceau (*fig.* 25) on dit que a et b sont *séparés* par c et d quand un rayon, qui décrit le faisceau en pivotant, ne peut passer de a en b sans se

confondre avec un et un seul des deux autres rayons *c*, *d*. La même définition s'applique à quatre plans d'un faisceau ou à quatre points A, B, C, D d'une ponctuelle (*fig.* 24); à la condition toutefois que l'on admette que, sur une droite (*fig.* 26) on peut passer d'un point A à un point B de deux

Fig. 26.

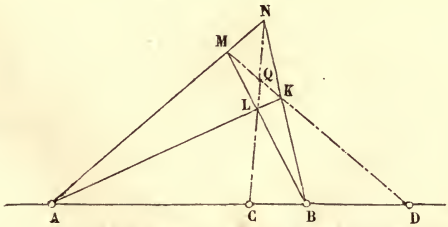


manières, soit en décrivant le *segment fini* AB, soit en décrivant le *segment infini* qui commence en A, passe par le point de l'infini et se termine en B.

Cette définition admise, nous pouvons énoncer la propriété suivante qui est évidente : Quatre éléments d'une forme de première espèce (c'est-à-dire quatre points d'une droite, quatre rayons d'un faisceau, etc.) peuvent toujours être divisés en deux couples, de manière que l'un soit séparé par l'autre, et cela ne peut se faire que d'une seule manière. Dans la *fig.* 24, par exemple, les deux couples qui se séparent réciproquement sont AB, CD, et si A′B′C′D′ est une forme projective à ABCD, le couple A′B′ sera aussi séparé par C′D′; car les projections et les sections n'altèrent pas la position relative des éléments.

45. Soient maintenant quatre points harmoniques ABCD (*fig.* 27), c'est-à-dire quatre points obtenus par la construc-

Fig. 27.



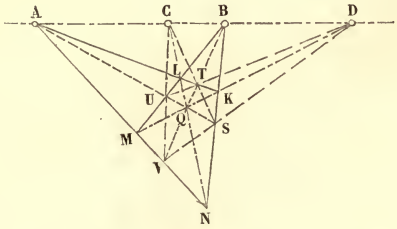
tion du n° 38 à gauche, qui permet de construire, d'une infinité de manières, un quadrangle complet dont A et B sont

deux points diagonaux (n° 30, 2°, à gauche), tandis que deux côtés opposés passent par C et D. Il suffit d'énoncer cette construction pour reconnaître que les deux points A et B sont dans les mêmes conditions par rapport au système et qu'il en est de même pour les points C et D. Il résulte de là que si ABCD est une forme harmonique, les formes BACD, ABDC, BADC, que l'on obtient par les permutations des lettres A et B et par celles des lettres C et D, sont aussi harmoniques. Par suite (n° 43) la forme ABCD, par exemple, est projective à la forme BADC, c'est-à-dire que l'on pourra passer de l'une à l'autre au moyen d'un nombre limité de projections et de sections. En effet, en projetant de K sur CQ la forme ABCD, on obtient la forme LNCQ qui, projetée de M sur AB donne BACD.

46. Dans la forme harmonique ABCD, les points A et B sont nécessairement séparés (n° 44) par les deux autres. En effet, projetons (*fig.* 27) la forme ABCD sur la droite KM, d'abord du centre L, puis du centre N; les projections seront KMQD, MKQD. Ces formes, composées des mêmes éléments, doivent présenter le même mode de séparation : donc les points K, M sont séparés par Q, D, et par suite A, B sont séparés par C, D.

47. Menons les droites AQ, BQ (*fig.* 28) qui rencontrent NK et LM, KL et MN respectivement aux points S, U, T, V.

Fig. 28.



Le quadrangle complet LTQU a deux côtés opposés qui concourent en A, deux autres côtés opposés qui concourent en B, un cinquième côté (LQ ou LN) passant par C: donc le sixième

côté TU passera par D (n° 38). De même, le sixième côté VS du quadrangle complet NVQS passera par D, et les sixièmes côtés ST, UV des quadrangles complets KSQT, MUQV passeront par C. On obtient ainsi un quadrangle STUV dont deux côtés opposés concourent en C, deux autres côtés opposés en D, tandis que le cinquième et le sixième côté passent respectivement par A et B. Cela signifie que la condition commune (n° 45) aux points C et D est la même que celle qui est commune aux points A et B; ou, ce qui revient au même, que le couple A, B peut être changé avec le couple C, D. Donc, si ABCD est une forme harmonique, non-seulement les formes BACD, ABDC, BADC, mais aussi les formes CDAB, CDBA, DCAB, DCBA sont harmoniques [1].

Les points A et B sont nommés *conjugués* entre eux : les points C et D sont donc aussi conjugués.

On dit que les points A, B sont séparés harmoniquement par les points C, D ; ou bien que les points C, D sont séparés harmoniquement par A et B, ou bien encore que le segment AB est divisé harmoniquement par le segment CD,.... Si deux points donnés A, B (*fig.* 27) sont séparés harmoniquement par les points C, D, où la droite AB est coupée par deux droites QC, QD, on dit aussi que les points A et B sont séparés harmoniquement par les droites QC, QD, ou par le point C et la droite QD, etc.; et que les droites QC, QD sont séparées harmoniquement par les points A, B,....

Il existe des propriétés et des dénominations analogues pour quatre rayons ou pour quatre plans harmoniques.

48. On peut aussi tirer l'énoncé suivant de la proposition du n° 38 (à gauche) : *Dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres* [2].

Soit, par exemple, le quadrilatère complet (*fig.* 29), dont les sommets opposés sont A et A′, B et B′, C et C′. La diagonale AA′ est rencontrée en E, F par les deux autres diago-

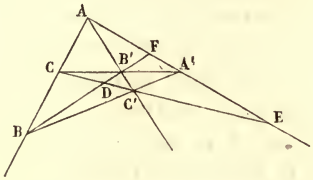
---

[1] Reye, *Geometrie der Lage* (Hannover, 1866), t. I, p. 34.

[2] Carnot, *Géométrie de position* (Paris, 1803), n° 225. — Baltzer, *Trigonometria*, p. 147.

nales BB′, CC′. Maintenant considérons le quadrangle complet BB′CC′, dont deux côtés opposés concourent en A, deux

Fig. 29.



autres côtés opposés en A′, tandis que le cinquième et le sixième côté passent respectivement par E, F. Les points AA′ sont séparés harmoniquement par les deux points E, F. De même, la considération des deux quadrangles complets CC′AA′, AA′BB′ permet d'établir la même propriété pour les deux autres groupes BB′FD, CC′DE.

49. Dans le quadrangle complet BB′CC′, les points diagonaux sont A, A′, D; et, comme le groupe des points BB′FD est harmonique, la même propriété appartient au groupe des quatre rayons qui les projettent de A (n° 40); donc :

Dans un quadrangle complet, deux côtés concourant en un point diagonal sont séparés harmoniquement par les deux autres points diagonaux.

Du reste, ce théorème n'est que le corrélatif (d'après la dualité dans la Géométrie plane) du théorème démontré dans le numéro précédent.

50. Les théorèmes du n° 38 donnent immédiatement le moyen de résoudre, au moyen de la règle seulement, les problèmes :

Étant donnés trois points d'une forme harmonique, construire le quatrième point.

Solution. — Soient (*fig.* 27) A, B, C les points donnés (en ligne droite), A et B devant être conjugués entre eux. Menons arbitrai-

Étant donnés trois rayons d'un faisceau harmonique, construire le quatrième rayon.

Soient (*fig.* 24) a, b, c les rayons donnés (issus d'un même centre et situés dans un même plan), a et b devant être conjugués entre eux.

rement deux droites par A et une par C, cette dernière coupe les deux premières en L, N. BL, BN coupent respectivement AN, AL en M, K; la droite KM coupera la droite donnée au point cherché D, conjugué de C (¹).

Par un point Q de c menons arbitrairement deux droites qui coupent a en A, R, et b en P, B. Les droites AB, RP se couperont en un point D, qui, joint au centre donné, donnera le rayon cherché a, conjugué à c.

51. Soit C (*fig.* 30) le point milieu de A et B (n° 50 à gauche). Nous pourrons disposer des éléments arbitraires de manière que K et M se transportent à distance infinie : pour cela, il faut construire un parallélogramme ALBN sur la diagonale AB; l'autre diagonale LN passera par C. Donc le point D passera à l'infini.

Réciproquement, si nous supposons que l'on donne les points A, B, D dont le troisième est à l'infini, nous pourrons encore construire sur la diagonale AB un parallélogramme ALBN; le quatrième point C, conjugué à D, doit être donné par l'intersection de la droite donnée avec LN : ce sera donc le point milieu de AB. Donc :

Quatre points ABCD étant harmoniques, si C est le point milieu de deux points conjugués A et B, le quatrième est à distance infinie; et réciproquement, si l'un des points est à l'infini, son conjugué sera le point milieu des deux autres.

Fig. 30.

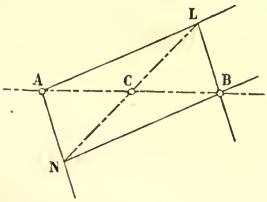
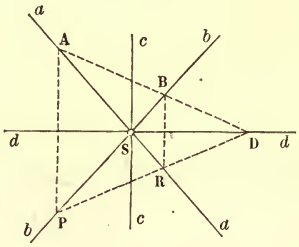


Fig. 31.



52. Soit c (*fig.* 31) la bissectrice de l'angle ab (n° 50, à droite). En prenant Q à l'infini sur c, les segments AB, PR seront égaux et compris entre les parallèles AP, BR : donc le rayon d sera perpendiculaire à c; c'est-à-dire :

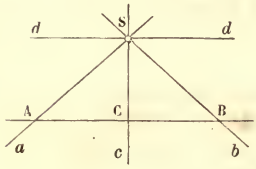
Quatre rayons a, b, c, d étant harmoniques, si l'un d'eux c fait des angles

(¹) De la Hire, *Sectiones conicæ* (Parisiis, 1665), p. 9.

égaux avec les deux conjugués a et b, le quatrième d sera perpendiculaire à c.

Réciproquement, si dans un faisceau harmonique $abcd$ (*fig.* 32) deux

Fig. 32.



rayons conjugués c et d sont perpendiculaires, ils seront les bissectrices des angles formés par les deux autres. En effet, en coupant le faisceau (dont le centre est en S) par une transversale parallèle à d, la section ABCD donne quatre points harmoniques (n° 40); et comme D est à l'infini, C sera le point milieu entre A et B (n° 51). Donc ASB est un triangle isoscèle et, par suite, SC est la bissectrice de l'angle au sommet.

§ IX. — Rapports anharmoniques.

53. Reprenons la *fig.* 2, qui représente la projection des points d'une droite a sur une autre droite a', faite d'un centre O; cherchons la relation qui existe entre deux segments correspondants AB, A′B′. Les triangles semblables OAJ, A′OI′ donnent

$$JA : JO = I'O : I'A' \quad (^1);$$

de même les triangles semblables OBJ, B′OI′ donnent

$$JB : JO = I'O : I'B',$$

d'où

$$JA . I'A' = JB . I'B' = JO . I'O,$$

(1) Dans toutes les équations entre des segments, nous supposons que l'on observe la règle ou convention des signes en vertu de laquelle AB et BA sont regardées comme des grandeurs égales et de signes contraires; il en résulte que si A, B, O sont trois points en ligne droite, on a

$$AB + BO + OA = O \quad \text{ou} \quad AB = OB - OA.$$

Voir Baltzer, *Planim.*, p. 168, et *Trig.*, p. 123.

c'est-à-dire que le rectangle JA.I'A' est constant, quel que soit le couple de points correspondants A, A'.

En désignant la constante JO.I'O par k, nous aurons donc

$$I'A' = \frac{k}{JA}, \quad I'B' = \frac{k}{JB};$$

en faisant la différence,

$$I'B' - I'A' = \frac{k(JA - JB)}{JA.JB};$$

mais

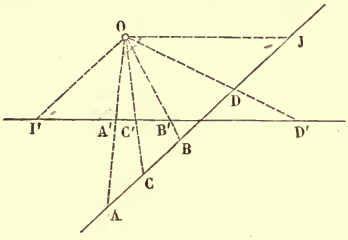
$$I'B' - I'A' = A'B', \quad JA - IB = -AB,$$

donc

$$A'B' = \frac{-k}{JA.JB} \cdot AB.$$

Si nous considérons quatre points A, B, C, D (*fig.* 33) de *a*

Fig. 33.



et les quatre projections A', B', C', D', nous aurons, d'une manière analogue,

$$A'C' = \frac{-k}{JA.JC} \cdot AC,$$

$$B'C' = \frac{-k}{JB.JC} \cdot BC,$$

$$A'D' = \frac{-k}{JA.JD} \cdot AD,$$

$$B'D' = \frac{-k}{JB.JD} \cdot BD,$$

et, en divisant,

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Si ABCD, A′B′C′D′ sont des sections faites par deux transversales s, s' (non situées dans un même plan) dans quatre plans α, β, γ, δ qui passent par une même droite u, c'est-à-dire si A′B′C′D′ est une projection de ABCD faite de l'axe u (n° 4), on aura encore l'égalité que nous venons de démontrer pour le cas de la projection d'un centre O.

En effet, coupons les quatre plans α, β, γ, δ en A″B″C″D″ par une droite s'', qui rencontre s et s'. Les droites AA″, BB″, CC″, DD″ sont les intersections des plans α, β, γ, δ par le plan ss'' et, par suite, elles concourent au point S, où ce dernier plan coupe l'axe u. De même A′A″, B′B″, C′C″, D′D″ sont quatre droites situées dans le plan $s's''$ et concourant en un point S′ de l'axe u. Donc A″B″C″D″ est une projection de ABCD du centre S et une projection de A′B′C′D′ du centre S′; on aura donc

$$\frac{A''C''}{B''C''}:\frac{A''D''}{B''D''}=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{A'C'}{B'C'}:\frac{A'D'}{B'D'}.$$

Le nombre

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$$

est nommé *rapport anharmonique* ou *double rapport* de quatre points (en ligne droite) A, B, C, D. Le résultat obtenu exprime donc le théorème :

Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite n'est pas altéré par une projection, quelle qu'elle soit (¹).

Ou bien :

Deux groupes projectifs de quatre points ABCD, A′B′C′D′ (*situés respectivement en ligne droite*) *ont des rapports anharmoniques égaux.*

Le quotient des expressions de A′C′, B′C′ donne

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC}{BC}:\frac{AJ}{BJ}.$$

(¹) Pappus, *Mathematicæ collectiones* (Édition de Comandino, Venise, 1589), liv. VII, p. 129. — *Voir* Baltzer, *Trigon.*, p. 139.

dans cette égalité le second membre est le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, J; donc le premier membre sera le rapport anharmonique de A′B′C′J′, ou bien le rapport anharmonique de quatre points A′, B′, C′, J′, dont le dernier est à l'infini, n'est autre chose que le rapport simple A′C′ : B′C′.

On a de même

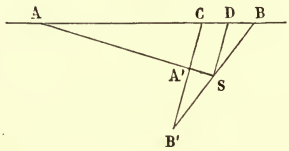
$$\frac{B'D'}{A'D'} = \frac{AJ}{BJ} : \frac{AD}{BD},$$

c'est-à-dire que le rapport anharmonique des quatre points A′, B′, J′, D′, dont le troisième est à l'infini, est égal au rapport simple B′D′ : A′D′.

On tire de là la solution du problème :

Étant donné trois points A, B, C (en ligne droite), déterminer un quatrième point D, de manière que le rapport anharmonique de la forme ABCD soit un nombre λ donné de signe et de grandeur (*fig.* 34).

Fig. 34.



Solution. — Menons par C une transversale quelconque et portons-y, à partir de C, deux segments CA′, CB′ dont le rapport CA′ : CB′ soit égal à λ : 1, valeur du rapport anharmonique donné; les deux segments CA′, CB′ seront dirigés dans le même sens ou en sens contraire, suivant que λ sera positif ou négatif. Tirons les droites AA′, BB′, et soit S leur intersection; la parallèle à A′B′ menée par S rencontrera AB au point cherché D [1].

En effet, nommons D′ le point à l'infini de A′B′, ABCD étant une projection de A′B′C′D′ du centre S; le rapport anharmonique sera égal à celui de A′B′C′D′, ou bien à

$$A'C' : B'C' = \lambda.$$

---

[1] Chasles, *Géométrie supérieure* (Paris, 1852), p. 10.

C'est là la solution graphique de l'équation

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \lambda,$$

ou

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} : \lambda = \mu,$$

ce qui revient à dire du problème : trouver le point D qui, avec deux points donnés A et B, forme deux segments AD, BD (en ligne droite), dont le rapport soit égal à un nombre μ donné de signe et de grandeur.

Le problème proposé admet donc une et une seule solution. Il ne peut, en effet, y avoir deux points différents D et D_1 tels que ABCD, $ABCD_1$ aient des rapports anharmoniques égaux : les rayons SD, SD_1, devant tous les deux être parallèles à A'B', coïncideront. On peut dire aussi :

Si les groupes ABCD, $ABCD_1$ *ont des rapports anharmoniques égaux, le point* D_1 *coïncide nécessairement avec le point* D.

Si deux groupes de quatre points ABCD, A'B'C'D' (respectivement en ligne droite) ont des rapports anharmoniques égaux, ils constituent des formes projectives.

En effet (n° 37), on peut toujours passer de la forme ABC à la forme A'B'C' par un nombre limité de projections ou de sections; soit D'' le point que ces opérations donnent à la place de D. Alors le rapport anharmonique de A'B'C'D'' sera égal à celui de ABCD et, par suite, les rapports anharmoniques de A'B'C'D' et A'B'C'D'' seront égaux entre eux. Donc D'' coïncide avec D'; ou bien les groupes ABCD, A'B'C'D' sont projectifs.

En d'autres termes, la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes ABCD, A'B'C'D' (composées chacune de quatre points en ligne droite) soient projectives est l'égalité (en grandeur et en signe) de leurs rapports anharmoniques.

Le rapport anharmonique de quatre points ABCD est désigné par le symbole (ABCD) [1]; par suite, la projectivité des

---

[1] Möbius, *Der barycentrische Calcul*, p. 246 (Leipzig, 1827).

deux formes ABCD, A′B′C′D′ sera exprimée par l'équation

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Si deux faisceaux de quatre rayons ou de quatre plans sont coupés respectivement par deux transversales en ABCD, A′B′C′D′, l'égalité

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

sera la condition nécessaire et suffisante pour que les deux faisceaux soient projectifs.

Nous conviendrons de nommer *rapport anharmonique* de quatre rayons a, b, c, d, ou de quatre plans α, β, γ, δ qui appartiennent à un faisceau, le rapport anharmonique des quatre points où les quatre éléments du faisceau sont rencontrés par une transversale quelconque, et de représenter ce rapport anharmonique par (a, b, c, d), $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Nous pouvons alors énoncer le théorème général :

La condition nécessaire pour que deux formes de première espèce, constituées chacune par quatre éléments, soient projectives est l'égalité de leurs rapports anharmoniques.

54. Comme deux formes harmoniques sont toujours projectives (n° 43), nous pouvons conclure du théorème précédent que le rapport anharmonique de quatre éléments harmoniques est un *nombre constant*. En effet, si ABCD est une forme harmonique, la forme BACD est aussi harmonique (n° 45), les deux formes ACBD, BCAD sont projectives, ou bien

$$(ACBD) = (BCAD),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD};$$

d'où

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1,$$

ou

$$(ABCD) = -1;$$

donc *le rapport anharmonique de quatre éléments harmoniques est l'unité négative* [1].

55. On peut mettre sous deux autres formes dignes d'être remarquées l'équation

$$(ABCD) = -1,$$

ou

$$(1) \qquad \frac{AC}{BC} + \frac{AD}{BD} = 0,$$

qui exprime que les quatre points ABCD sont harmoniques.

Comme $AD = CD - CA$, $BD = CD - CB$, l'équation (1) donne

$$CA(CD - CB) + CB(CD - CA) = 0,$$

ou

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}\right),$$

formule qui donne le point D quand les points A, B, C sont donnés.

Soit O le point milieu du segment CD, ou $OD = CO = -OC$, ce qui donne

$$AC = OC - OA, \quad AD = OD - OA = -(OC + OA),$$
$$BC = OC - OB, \quad BD = -(OC + OB).$$

L'équation (1), ou

$$\frac{AC}{AD} + \frac{BC}{BD} = 0,$$

deviendra

$$\frac{OC - OA}{OC + OA} = \frac{OB - OC}{OB + OC},$$

ou

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC};$$

donc

$$(3) \qquad \overline{OC}^2 = OA.OB,$$

ce qui veut dire : *La moitié du segment* CD *est moyenne proportionnelle entre les distances des points* A *et* B *au milieu de* CD.

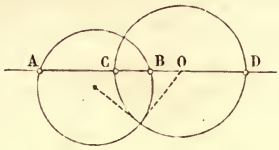
L'équation (3) montre que les segments OA, OB ont le même signe, c'est-à-dire que le point O ne tombe jamais entre A et B.

---

[1] Möbius, *loc. cit.*, p. 269.

Il résulte de là que, si l'on fait passer un cercle par A et B (*fig.* 35), OC sera la longueur de la tangente à ce cercle menée par le point O [1].

Fig. 35.

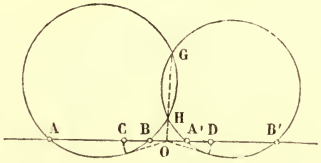


Donc le cercle de diamètre CD coupera orthogonalement le premier cercle (c'est-à-dire tous les cercles passant par A et B). Réciproquement, si deux cercles se coupent à angle droit, ils couperont une droite quelconque passant par le centre de l'un des deux cercles en quatre points harmoniques [2].

La même formule (3) sert à résoudre le problème suivant :

Étant donnés deux couples de points AB, A'B', déterminer un autre couple CD de manière que les deux groupes ABCD, A'B'CD soient harmoniques (*fig.* 36 et 37).

Fig. 36.



Prenons un point quelconque G en dehors de la droite et décrivons les cercles GAB, GA'B'; soit H leur second point d'intersection. Menons GH et soit O l'intersection de cette droite et de la droite donnée [3]; nous aurons dans le premier cercle [4]

$$OA.OB = OG.OH,$$

et dans le second

$$OA'.OB' = OG.OH;$$

par suite

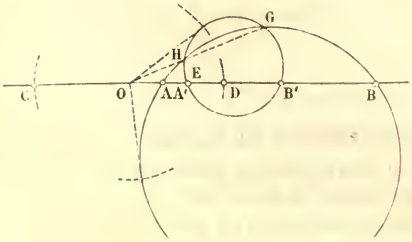
$$OA.OB = OA'.OB'.$$

---

(1) Baltzer, *Planim.*, p. 128.
(2) Baltzer, *Trigonom.*, p. 146.
(3) GH est l'*axe radical* des deux cercles. Baltzer, *Planim.*, p. 178 et suiv.
(4) Baltzer, *Planim.*, p. 128.

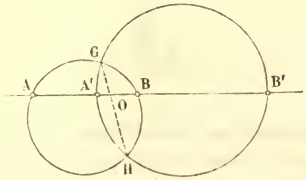
Donc O est le milieu du segment cherché; les points CD seront les intersections de la droite donnée avec le cercle décrit de O comme centre avec un rayon égal à la longueur commune des deux tangentes menées de O aux deux premiers cercles.

Fig. 37.



Le problème admet une solution réelle quand le point O tombe en dehors des deux segments AB, A'B' et, par suite, en dehors des deux cercles (*fig.* 36 et 37). Il n'existe pas de solution réelle quand le couple de points AB est séparé par le couple A'B' (*fig.* 38); dans ce cas le point O se trouve à l'intérieur de deux segments.

Fig. 38.



A, B, C, D étant quatre points harmoniques, supposons A et B infiniment voisins ou même coïncidents. Si C est à distance infinie, D coïncidera avec A et B, puisqu'il doit être au milieu de ces deux points (n° 51). Si C est à distance finie et placé d'une manière quelconque, pourvu qu'il ne coïncide ni avec A ni avec B, l'équation (2) donne CD = CA = CB, c'est-à-dire que D coïncide avec les points A et B.

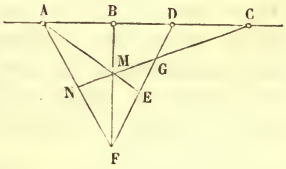
Supposons maintenant que A et C coïncident et que B soit à l'infini. A doit être le milieu du segment CD : donc D coïncidera avec A et C. Si B est à distance finie et placé d'une manière quelconque, pourvu qu'il ne coïncide ni avec A ni avec C, l'équation (1) donne AD = 0, ce qui veut dire que le point D coïncide avec A et C.

Donc, *si deux de quatre points harmoniques coïncident, un des deux autres se confond aussi avec eux et le quatrième est indéterminé.*

56. Théorème. — *Une forme quelconque (de première espèce) composée de quatre éléments* A, B, C, D *est projective avec la forme que l'on déduit de la première, en changeant entre eux deux éléments et en changeant, en même temps, les deux autres éléments entre eux. Ainsi* ABCD *est projective avec* ~~BACD.~~ BADC

Démonstration. — En effet, soient A, B, C, D quatre points (*fig.* 39), et EFGD une projection de ces points, faite à partir

Fig. 39.



d'un centre M sur une droite passant par D. Soit N l'intersection de AF et de CM, MNGC sera une projection de EFGD faite du centre A; BADC sera une projection de MNGC faite du centre F; par conséquent (n° 35), la forme BADC est projective avec ABCD. On démontre, de la même manière, que ABCD est projective avec CDAB, DCBA [1].

Il résulte de là, par exemple, que si le faisceau *abcd* de quatre rayons est projectif avec ABCD, il est projectif aussi avec BADC, CDAB, DCBA; c'est-à-dire que, *si deux formes de quatre éléments sont projectives, la correspondance entre les éléments peut être établie de quatre manières différentes.*

57. Le théorème qui précède revient à ceci : étant donnés quatre éléments A, B, C, D d'une forme de première espèce, les rapports anharmoniques suivants sont égaux entre eux :

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

---

[1] Staudt, *loc. cit.*, p. 59.

Quatre éléments (d'une forme de première espèce) pourront être rangés de vingt-quatre manières différentes, ou bien forment vingt-quatre groupes

ABCD,	BADC,	CDAB,	DCBA,
ABDC,	BACD,	DCAB,	CDBA,
ACBD,	CADB,	BDAC,	DBCA,
ACDB,	CABD,	DBAC,	BDCA,
ADBC,	DACB,	BCAD,	CBDA,
ADCB,	DABC,	CBAD,	BCDA,

que nous avons distribués en six lignes. Les groupes de chaque ligne sont projectifs entre eux (n° 56) et ont, par suite, le même rapport anharmonique. Si l'on veut déterminer les rapports anharmoniques des vingt-quatre groupes, il suffit donc de considérer un groupe par ligne, les six groupes de la première colonne par exemple. Ces six rapports anharmoniques ont entre eux des relations telles, que, connaissant un quelconque d'entre eux, on détermine immédiatement les cinq autres.

Considérons les deux groupes ABCD, ABDC, qui diffèrent entre eux par l'échange des deux derniers éléments. Les rapports anharmoniques

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \quad (ABDC) = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}$$

sont des quantités inverses : donc

$$(1) \qquad (ABCD)(ABDC) = 1;$$

de même

$$(1)' \qquad (ACBD).(ACDB) = 1,$$

$$(1)'' \qquad (ADBC).(ADCB) = 1.$$

Les quatre points ABCD étant en ligne droite, on a identiquement

$$BC.AD + CA.BD + AB.CD = 0 \text{ [1]};$$

---

[1] Multiplions par AD l'identité

$$BC + CA + AB = 0;$$

tenons compte de

$$AD = BD + AB \quad \text{et de} \quad AD = CD - CA,$$

nous aurons

$$BC.AD + CA(BD + AB) + AB(CD - CA) = 0,$$

d'où

$$BC.AD + CA.BD + AB.CD = 0.$$

divisant par BC.AD, on trouve

$$\frac{AC.BD}{BC.AD} + \frac{AB.CD}{CB.AD} = 1,$$

ou

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} + \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = 1,$$

ou bien, ce qui revient au même (n° 53),

$$(2) \qquad (ABCD) + (ACBD) = 1;$$

on aura de même

$$(2)' \qquad (ABDC) + (ADBC) = 1,$$

$$(2)'' \qquad (ACBD) + (ADCB) = 1.$$

Si nous désignons par λ le rapport anharmonique du groupe ABCD, c'est-à-dire si nous posons

$$(ABCD) = \lambda,$$

nous aurons, d'après la formule (1),

$$(ABDC) = \frac{1}{\lambda},$$

et d'après la formule (2)

$$(ACBD) = 1 - \lambda;$$

d'où, d'après (1)',

$$(ACDB) = \frac{1}{1-\lambda},$$

et d'après (2)''

$$(ADCB) = 1 - \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1};$$

et puis, d'après (1)'' et (2)',

$$(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \text{ (1)}.$$

Si deux points A et B coïncident dans le groupe ABCD, on a

$$AC = BC,\ AD = BD, \quad \text{et par suite} \quad (ABCD) = (AACD) = 1.$$

Mais, si $\lambda = 1$, les autres rapports anharmoniques deviennent

$$(ACAD) = 0, \quad (ACDA) = \infty;$$

(1) Möbius, *loc. cit.*, p. 249.

$(ABCD) = -\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$

ce qui revient à dire : les valeurs que prend le rapport anharmonique de quatre éléments dont deux coïncident sont $1, 0, \infty$.

Si $(ABCD) = -1$, les formules précédentes donnent

$$(ACBD) = 2, \quad (ACDB) = \tfrac{1}{2};$$

donc (n° 54), si le rapport anharmonique de quatre points a l'une des valeurs 2 ou $\frac{1}{2}$, ces points, pris dans un autre ordre, forment un groupe harmonique.

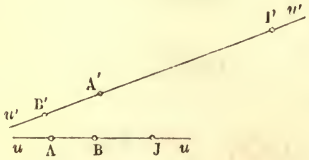
58. Du théorème 53, qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour la projectivité de deux groupes de quatre éléments, on conclut que :

Si deux formes (de première espèce) sont projectives, quatre éléments quelconques de l'une d'elles et les quatre éléments correspondants de l'autre ont des rapports anharmoniques égaux (¹).

En particulier, à quatre éléments harmoniques de l'un correspondent quatre éléments harmoniques de l'autre (n° 43).

59. Soient AA′, BB′ deux couples quelconques de points correspondants de deux ponctuelles projectives (*fig.* 40), et

Fig. 40.



I, J′ leurs points à l'infini. Nous aurons l'égalité des rapports anharmoniques

$$(ABIJ) = (A'B'I'J'),$$

ou

$$(BAJI) = (A'B'I'J'),$$

ou encore, parce que I et J′ sont à l'infini (n° 53),

$$BJ : AJ = A'I' : B'I',$$

d'où l'on tire

$$JA.I'A' = JB.I'B',$$

(¹) Steiner, *Systematische Entwickelung*, etc., p. 33 (Berlin, 1832).

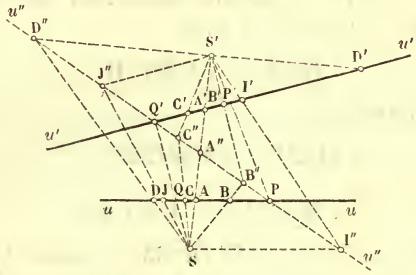
ce qui revient à dire : le produit JA.I'A' a une valeur constante, quel que soit le couple de points correspondants [1].

(*Voir* le n° 53, où ce théorème est démontré pour deux ponctuelles perspectives.)

§ X. — Constructions des formes projectives.

60. Soient ABC et A'B'C' deux ternes d'éléments correspondants de deux formes projectives (*fig.* 41), quel que soit

Fig. 41.



le système d'opérations (projections et sections) par lesquelles on passe de ABC à A'B'C'; ce même système conduira aussi d'un autre élément quelconque D de la première forme à l'élément correspondant D' de la seconde. En effet, si D pouvait donner, au moyen de ces opérations, un autre élément D'', les rapports anharmoniques (ABCD), (A'B'C'D'') seraient égaux entre eux; mais on a, par hypothèse,

$$(ABCD) = (A'B'C'D');$$

donc on aurait

$$(A'B'C'D') = (A'B'C'D''),$$

ce qui est absurde, à moins que D'' ne se confonde avec D' (n° 53).

---

[1] Steiner, *loc. cit.*, p. 40.

Dans la *fig.* 41, les opérations sont : une projection de S, une section par u'', une projection de S′ et une section par u'.

61. Il est également facile de démontrer le théorème inverse de celui du n° 53 ; ou :

Étant données deux formes de première espèce, si aux éléments A, B, C, D,... de l'une correspondent, un à un, les éléments A′, B′, C′, D′,... de l'autre, de manière que quatre éléments quelconques de la première et les quatre éléments correspondants de la seconde aient les mêmes rapports anharmoniques, les deux formes sont projectives.

En effet, tout système d'opérations qui conduit du terne ABC au terne A′B′C′ conduira également de l'élément D à un élément D″, tel que l'on aura

$$(ABCD) = (A'B'C'D'');$$

mais, par hypothèse,

$$(ABCD) = (A'B'C'D') :$$

donc

$$(A'B'C'D') = (A'B'C'D'');$$

par suite D″ coïncide avec D′ (n° 53). Comme la même conclusion est vraie pour n'importe quel autre couple d'éléments correspondants, il est démontré que les deux formes sont projectives (n° 34).

62. Du n° 60 on déduit, comme cas particulier, que si deux formes projectives de première espèce renferment deux ternes correspondants ABC, A′B′C′ qui soient perspectifs, les deux formes données sont aussi perspectives.

Par exemple, si les formes sont deux ponctuelles ABCD..., A′B′C′D′..., l'hypothèse faite revient à supposer que les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un point O : donc les autres droites analogues DD′,... passeront aussi par O (*fig.* 17 et 33).

Comme cas particulier, supposons que les points AA′ coïncident (*fig.* 20) en formant un *point uni* [1]. Les ternes ABC,

---

[1] Dans deux formes projectives, nous appellerons *élément uni* un élément qui coïncide avec son correspondant.

A′B′C′ sont perspectifs, et leur centre de projection est le point commun à BB′, CC′; donc :

Si deux ponctuelles projectives ont un point uni, elles sont perspectives.

Réciproquement, il est évident que deux ponctuelles perspectives ont toujours un point uni.

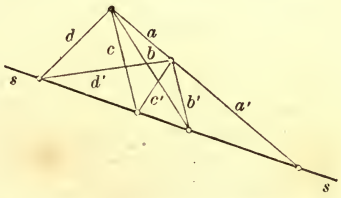
Si les formes sont deux faisceaux de rayons *abcd*..., *a′b′c′d′*... dans un même plan, l'hypothèse revient à supposer que les trois points *aa′*, *bb′*, *cc′* sont sur une droite *s* : donc tous les autres points analogues *dd′*,... tomberont aussi sur la même droite (*fig.* 18).

Si la droite *s* est tout entière à l'infini, on obtient la propriété suivante :

Si deux faisceaux projectifs de rayons ont trois couples de rayons correspondants parallèles, deux autres rayons correspondants quelconques seront aussi parallèles.

L'hypothèse est vérifiée si les rayons *a*, *a′* coïncident en un *rayon uni* (*fig.* 42); alors la droite *s* est celle qui joint les points *bb′*, *cc′*.

Fig. 42.



Donc, *si deux faisceaux projectifs* (*dans un plan*) *ont un rayon uni, ils sont perspectifs.*

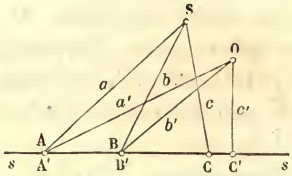
Et réciproquement, deux faisceaux perspectifs de rayons (dans un plan) ont toujours un rayon uni.

Si l'une des formes est une ponctuelle ABCD... et l'autre un faisceau de rayons *abcd*... (*fig.* 25), l'hypothèse revient à supposer que les rayons *abc* passent respectivement par A, B, C; donc *d* passera aussi par D,..., etc.

63. Deux ponctuelles peuvent se trouver sur une même droite, ou autrement dit elles peuvent être *superposées :* par

exemple, si deux faisceaux de rayons (dans un même plan) $S \equiv abc\ldots$, $O \equiv a'b'c'\ldots$ (*fig.* 43) sont coupés par une même transversale, celle-ci contiendra les deux ponctuelles ABC..., A'B'C'..., qui seront projectives si les deux faisceaux le

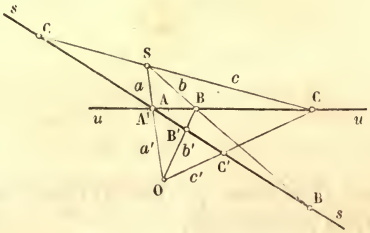
Fig. 43.



sont. On peut se demander, dans ce cas, s'il y a des *points unis*, c'est-à-dire si deux points correspondants des deux ponctuelles coïncident en quelque point de la transversale.

Si l'on mène, par exemple, la transversale s par les points aa' et bb', les points AA' coïncideront ainsi que BB'; il y a donc, dans ce cas, deux points unis. Si l'on projette une ponctuelle u (*fig.* 44) de deux centres S, O (situés dans un même

Fig. 44.

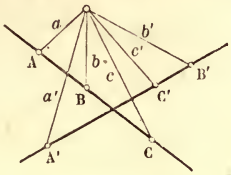


plan avec u), on a deux faisceaux $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$, et si ensuite on tire une transversale s par le point où le rayon uni aa' est rencontré par u, on obtient les deux ponctuelles projectives superposées ABC..., A'B'C'... qui ont un seul point uni AA'. Dans la suite (n° 82), nous verrons que deux ponctuelles projectives superposées peuvent aussi n'avoir aucun point uni.

D'une manière analogue, deux faisceaux de rayons peuvent

être *concentriques :* c'est ce qui arrive quand on projette deux ponctuelles distinctes d'un même centre (*fig.* 45); deux

Fig. 45.



faisceaux de plans peuvent avoir même axe si l'on projette d'un même axe deux ponctuelles distinctes, etc. En coupant deux gerbes par un même plan, on obtient deux plans ponctuels superposés; en projetant deux plans ponctuels d'un même centre, on obtient deux gerbes concentriques. Dans tous ces cas, les deux formes en question sont *superposées*, et la recherche de leurs *éléments unis*, si elles sont projectives, a une grande importance.

64. Théorème. — *Deux formes (de première espèce) projectives superposées ont, ou deux éléments unis au plus, ou tous leurs éléments unis.*

Démonstration. — En effet, s'il y avait trois éléments unis A, B, C, en nommant D et D′ deux autres éléments correspondants quelconques, on aurait (n° 58) l'égalité

$$(ABCD) = (ABCD')$$

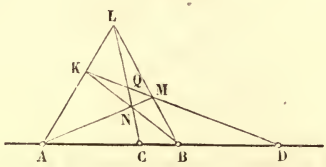
et, par suite, D′ coïnciderait avec D (n° 53).

Donc, si les deux formes ne sont pas identiques, elles ne peuvent pas avoir plus de deux éléments unis.

65. Si une forme (de première espèce) composée de quatre éléments ABCD est projective avec une seconde forme déduite de la première par l'échange de deux éléments, par exemple avec BACD, je dis que la forme est harmonique et que les deux éléments échangés sont conjugués. Ce théorème est déjà renfermé dans le n° 54; mais nous pouvons en donner maintenant la démonstration graphique suivante.

Supposons, par exemple, que A, B, C, D, soient quatre points en ligne droite (*fig.* 46); soit KMQD une projection de ces points faite d'un centre quelconque L, sur une droite passant par D. ABCD est projective avec KMQD et avec BACD : donc

Fig. 46.



les formes KMQD, BACD sont projectives. Et, comme D est un point uni pour ces formes, elles sont perspectives (n° 62), et les droites KB, MA, QC concourent au même point N. Il résulte de là que KLMN est un quadrangle complet dont deux côtés opposés concourent en A, deux autres côtés opposés concourent en B, tandis que le cinquième et le sixième côté passent respectivement par C, D. Donc (n° 38) A, B, C, D sont quatre points harmoniques.

66. Comme le passage d'une forme à une autre forme projective (de première espèce) peut toujours être effectué au moyen du système d'opérations qui sert à déduire trois éléments de l'un des trois éléments correspondants de l'autre (n° 60), et comme deux groupes donnés de trois éléments sont toujours projectifs, c'est-à-dire peuvent toujours être déduits l'un de l'autre moyennant quelques projections et sections, nous pouvons conclure :

Trois couples d'éléments correspondants de deux formes projectives étant donnés arbitrairement, on peut construire autant d'autres couples d'éléments correspondants que l'on veut.

Nous donnerons deux exemples : l'un de deux ponctuelles, et l'autre de deux faisceaux de rayons; il est entendu que, dans l'un et l'autre cas, les deux formes sont dans un même plan.

Soient (*fig.* 47) A et A′, B et B′, C et C′ les trois couples donnés de points correspondants des ponctuelles projectives u, u' qu'il s'agit de construire. Opérons comme nous l'avons fait au n° 37; sur la droite qui joint deux points correspondants, par exemple AA′, prenons arbitrairement deux points S, S′; traçons SB, S′B′ qui se coupent en B″, et SC, S′C′ qui se coupent en C″. Soit ensuite A″ le point où AA′ coupe B″C″. Les opérations qui servent à passer de ABC à A′B′C′ sont : 1° la projection à partir de S; 2° la section par $u'' \equiv$ A″B″C″; 3° la projection à partir de S′; 4° la section par u'. Donc les mêmes opérations conduiront d'un autre point quel-

Fig. 47.

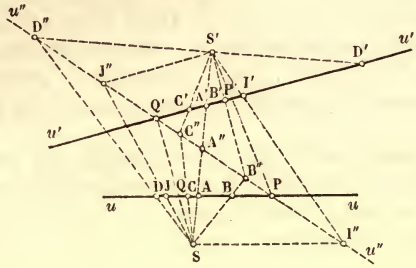
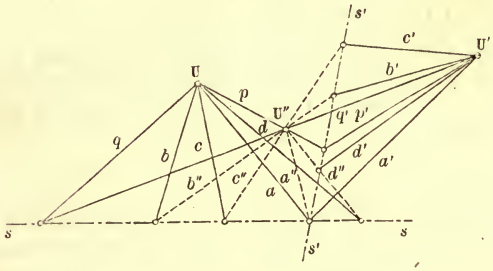


Fig. 48.



rayons correspondants de deux faisceaux projectifs U et U′ qu'il s'agit de construire. Par le point commun à deux rayons correspondants, par exemple aa', menons arbitrairement deux transversales s et s': soient b'' la droite qui joint les points sb, $s'b'$; c'' la droite qui joint les points sc, $s'c'$; et a'' la droite qui joint les points aa' et $b''c''$. Les opérations qui servent à passer de abc à $a'b'c'$ sont : 1° la section par s; 2° la projection à partir du point U″ commun à $a''b''c''$; 3° la section par s'; 4° la projection à partir de U′. Donc les mêmes opérations conduiront d'un

conque D de u au point correspondant de u'; ou bien les rayons SD, S'D' doivent se couper en un point D'' de la droite fixe u''.

De cette manière, on obtient une ponctuelle $u'' \equiv$ A''B''C''D''..., perspective avec u aussi bien qu'avec u'.

autre rayon quelconque d du faisceau U au rayon correspondant d' du faisceau U'; ou bien les points sd, $s'd'$ doivent se trouver sur une droite d'' passant par le point fixe U''.

De cette manière, on obtient un faisceau U'' $\equiv a''\,b''\,c''\,d''$..., perspectif avec U aussi bien qu'avec U'.

Le rayon passant par S (*fig.* 47) et parallèle à u coupe u'' en I'', le rayon S'I'' coupera u' au point I' dont le correspondant sur u est à l'infini. De la même manière, si le rayon passant par S' et parallèle à u' coupe u'' en J'', le rayon SJ'' coupera u au point J, dont le correspondant sur u' est à l'infini.

Soit P (*fig.* 47) le point où u est coupé par u''; le point P' sera l'intersection de u' avec le rayon S'P. De même, si Q' est le point où u' est coupé par u'', le point Q sera celui où u est coupé par le rayon SQ'.

Appelons p (*fig.* 48) le rayon UU'': le rayon correspondant p' joindra U' au point $s'p$. De même aussi, si le rayon U'U'' est désigné par q', le rayon q joindra U au point sq'.

67. Les centres S et S' doivent être alignés sur deux points correspondants; du reste, ils sont arbitraires. Par exemple, nous pouvons mettre S en A' et S' en A (*fig.* 49). Alors le rayon S'P coïncide avec u et, par suite, P' devient le point commun à u et u'. De même, le rayon SQ' coïncide avec u' et Q tombe aussi au point uu'.

Autrement, si nous prenons les points A', A au lieu des centres S, S', la droite u'' rencontrera respectivement u et u' aux points P, Q' qui correspondent au point uu', considéré d'abord comme point P' de u', puis comme point Q de u.

Mais, dans la construction du numéro précédent, la droite u'' était

Les transversales s, s' doivent passer par le point commun à deux rayons correspondants; du reste, elles sont arbitraires. Par exemple nous pouvons prendre a' pour s et a pour s' (*fig.* 50). Alors le point $s'p$ coïncide avec U; par suite p' sera la droite UU'. De même, le point sq' coïncide avec U' et, par suite, q ne diffère pas de la droite UU'.

Autrement, si nous prenons les rayons a', a au lieu des transversales s, $s'b$, le point U'' sera l'intersection des rayons p, q' qui correspondent à UU', considérée d'abord comme rayon p' du faisceau U', puis comme rayon q du faisceau U.

Mais, dans la construction du numéro précédent, le point U'' était le

le lieu des intersections des rayons correspondants des faisceaux perspectifs

S (ABCD...), S′(A′B′C′D′...).

Donc la droite u'' que nous venons d'obtenir sera pareillement la section commune des faisceaux

A′(ABCD...), A (A′B′C′D′...),

c'est-à-dire le lieu des points où se coupent les couples de droites A′B et AB′, A′C et AC′, A′D et AD′,....

Si, au lieu des points A′A nous prenions comme centres de projection deux autres points comme B′ et B, ou C′ et C,..., la droite u'' devrait encore couper u et u' aux points P, Q′, c'est-à-dire que la droite u'' resterait la même. Donc :

Si ABC...MN..., A′B′C′...M′N′... sont deux ponctuelles projectives (dans un même plan) tous les couples de droites analogues à MN′, M′N se coupent en des points qui appartiennent à une droite fixe. Cette droite passe par les points

Fig. 49.

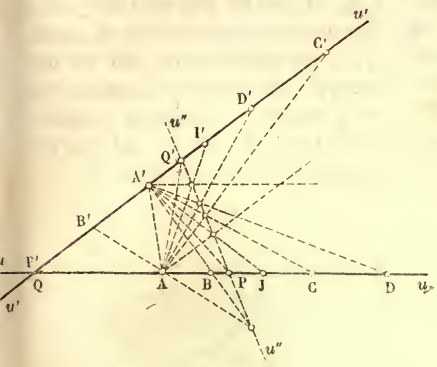
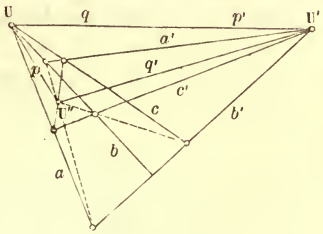


Fig. 50.



centre de projection pour les ponctuelles perspectives

$s\,(abcd\ldots)$, $s'(a'b'c'd'\ldots)$.

Donc le point U″ que nous venons d'obtenir sera pareillement le centre de projection des ponctuelles

$a'\,(abcd\ldots)$, $a\,(a'b'c'd'\ldots)$,

c'est-à-dire le point commun aux droites qui joignent les couples de points $a'b$ et ab', $a'c$ et ac', $a'd$ et ad',....

Si, au lieu des rayons a', a, nous prenions comme transversales deux autres rayons comme b' et b, ou c' et c,..., le point U″ serait encore l'intersection des rayons p, q', c'est-à-dire que le point U″ resterait le même. Donc :

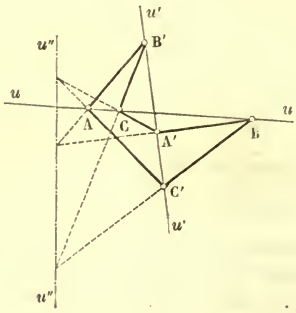
Si $abc\ldots mn\ldots$, $a'b'c'\ldots m'n\ldots$ sont deux faisceaux projectifs de rayons (dans un même plan), les droites qui joignent les couples de points analogues à mn', $m'n$ passent toutes par un point fixe, qui est l'intersection des rayons qui corres-

des deux ponctuelles qui correspondent à leur point d'intersection.

68. Ce théorème, limité aux trois couples de points AA′, BB′, CC′, qui sont, du reste, complétement arbitraires, peut s'énoncer ainsi :

Si un hexagone AB′CA′BC′ (*fig.* 51) a ses sommets d'ordre impair sur une droite u, et ses sommets d'ordre pair sur une droite u', les trois couples de côtés opposés (AB′ et A′B, B′C et BC′, CA′ et AC′) se coupent en trois points situés sur une droite u'' [1].

Fig. 51.



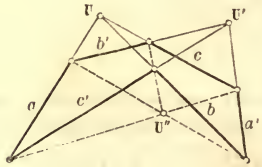
69. Si les deux ponctuelles u, u' sont perspectives (*fig.* 53), les points P et Q′ coïncident avec le point O commun aux deux droites ; alors AA′BB′ est un quadrangle complet, dont les points diagonaux sont O, S (point de concours de AA′ BB′...), et M (intersection de AB′ et A′B) ; par suite (n° 49) les droites u, u' sont séparées harmoniquement par les droites u'' et OS. Donc :

pondent à la droite qui joint les centres des deux faisceaux.

Ce théorème, limité aux trois couples de rayons aa', bb', cc', qui sont, du reste, complétement arbitraires, peut s'énoncer ainsi :

Si un hexagone $ab'ca'bc'$ (*fig.* 52) est tel que ses côtés d'ordre impair concourent en un point U, et ses côtés d'ordre pair en un point U′, les droites qui joignent les trois couples de sommets opposés (ab' et $a'b$, $b'c$ et bc', ca' et $a'c$) passent par un même point U″.

Fig. 52.

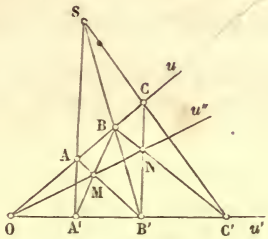


Si les deux faisceaux U et U′ sont perspectifs (*fig.* 55) les rayons p et q' se confondent avec la droite UU′ ; alors $aa'bb'$ est un quadrilatère complet, dont les diagonales sont UU′, s (section commune des deux faisceaux) et m (qui joint les points ab', $a'b$) ; par suite (n° 48) les points U, U′ sont séparés harmoniquement par le point U″ et la droite s. Donc :

[1] Pappus, *loc. cit.*, liv. VII, p. 139.

Si deux transversales u, u' coupent un faisceau de rayons $a, b, c, \ldots$ aux points (A, A'), (B, B'), (C, C'),..., les points où se coupent les couples

Fig. 53.



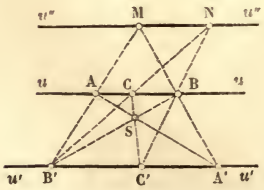
de droites AB' et A'B, AC' et A'C, BC' et B'C,... tomberont sur une même droite u'' passant par le point uu' ; et les droites u, u' seront séparées harmoniquement par la droite u'' et le centre du faisceau.

On déduit de là la solution du problème :

Tracer la droite qui joint un point donné M au point de concours inaccessible de deux droites données u, u'.

Par M (*fig.* 53 et 54) menons

Fig. 54.



deux droites qui coupent u en A, B, et u' en B', A'; du point S où se

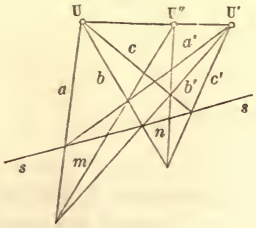
Si une ponctuelle est projetée de deux points U et U' par les rayons (a, a'), (b, b'), (c, c'),..., les droites qui joignent les couples de points $(ab', a'b)$, $(ac', a'c)$, $(bc', b'c)$,... concourent en un même point U'' qui, avec la droite s, divise harmoniquement UU'.

On déduit de là la solution du problème :

Construire le point d'intersection d'une droite tracée m et d'une droite non tracée, mais déterminée par deux points donnés U, U'.

Sur m (*fig.* 55) prenons deux

Fig. 55.



points qui, joints à U, donnent les droites a, b, et, joints à U', les

coupent AA′ et BB′, menons une autre droite qui coupe u, u' en C, C′. Le point N commun aux deux droites BC′, B′C appartiendra à la droite donnée u''.

droites b', a'; sur la droite s qui joint les points aa', bb', prenons un troisième point qui, joint à U, U′, donne les droites c, c'. La droite n qui joint les points bc', $b'c$ coupera m au point cherché U″.

Si les droites u, u' sont parallèles (*fig.* 54), la construction précédente résout le problème :

Étant données deux droites parallèles, tracer, au moyen de la règle seulement, la droite parallèle aux droites données qui passe par un point donné.

70. Revenons à la construction du n° 66 (à gauche) et prenons comme centre S le point où AA′ est coupé par BB′, et comme centre S′ le point commun à AA′, CC′ (*fig.* 56). Alors la droite u'' sera la droite B′C, parce que les rayons SB, S′B′ se coupent en B′, et les rayons SC, S′C′ en C. Par suite, on construira un autre couple quelconque de points correspondants D, D′, en observant que les droites SD, S′D′ doivent concourir sur B′C.

Revenons à la construction du n° 66 (à droite), et prenons comme transversale s la droite qui joint les points aa', cc', et comme transversale s' la droite qui joint les points aa', bb' (*fig.* 57). Alors le point U″ sera l'intersection bc', parce que b joint les points sb, $s'b'$, et c' les points sc, $s'c'$. Par suite, on construira un autre couple quelconque de rayons correspondants d, d', en observant que les points sd, $s'd'$ doivent être en ligne droite avec bc'.

Fig. 56.

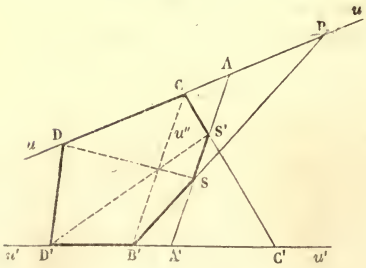
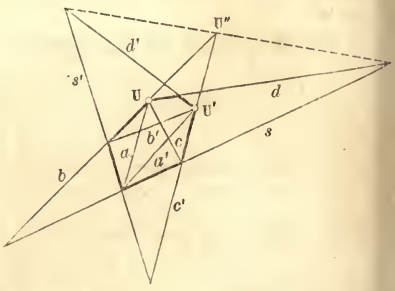


Fig. 57.



En considérant la *fig.* SS′CDD′B′ qui est un hexagone, nous pouvons énoncer ce théorème :

Dans un hexagone, dont les côtés

En considérant la *fig.* $ss'bdd'c'$ qui est un hexagone, nous pouvons énoncer ce théorème :

Dans un hexagone, dont les som-

sont deux ponctuelles projectives, et les droites qui joignent quatre couples des points correspondants, les trois droites qui joignent deux à deux les sommets opposés concourent en un même point.

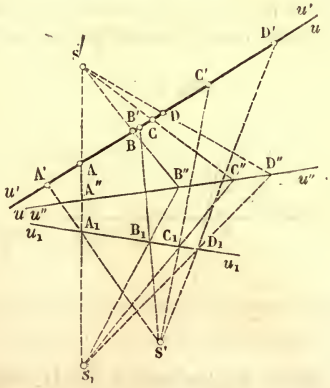
71. Dans la solution du problème du n° 66 (à gauche), si les trois droites AA′, BB′, CC′ avaient un point commun S (si A, A′ coïncidaient par exemple), les deux ponctuelles seraient perspectives, et il suffirait de tirer des rayons par S pour obtenir tous les couples de points correspondants (*fig.* 17).

mets sont les centres de deux faisceaux projectifs et les intersections de quatre couples des rayons correspondants, les trois points où se coupent deux à deux les couples de côtés opposés sont en ligne droite.

Si les trois points *aa′*, *bb′*, *cc′* du n° 66 (à droite) étaient sur une même droite *s* (si *a*, *a′* coïncidaient par exemple), les deux faisceaux seraient perspectifs, et il suffirait de joindre les centres des deux faisceaux à chaque point de *s* pour obtenir tous les couples de rayons correspondants (*fig.* 18).

72. Si les deux ponctuelles *u*, *u′* (n° 66 à gauche) sont superposées, c'est-à-dire si les six points donnés AA′BB′CC′ sont sur une même droite (*fig.* 58), il faut commencer par projeter *u′* d'un centre arbitraire S′ sur

Fig. 58.

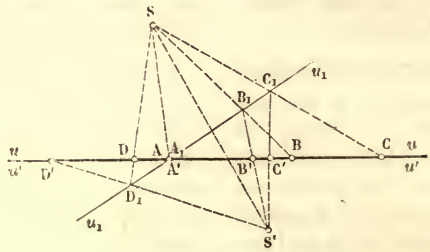


une droite quelconque u_1, puis opérer sur les ponctuelles $u \equiv (ABC\ldots)$, $u_1 \equiv (A_1B_1C_1D_1\ldots)$, c'est-à-dire sur les couples de points (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1) de la manière indiquée au n° 66. Un couple de points correspondants D, D_1 des ponctuelles *u*, u_1 étant trouvé, le rayon S′ D_1 déterminera sur *u′* le point D′ correspondant à D.

La construction se simplifie si deux points correspondants A, A′ coïn-

cident (*fig.* 59) ; alors, menant u_1 par A, la ponctuelle u_1 est perspective avec u ; par conséquent, après avoir projeté u' du centre arbitraire S′ sur

Fig. 59.

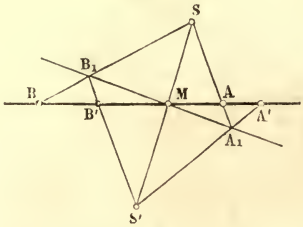


u_1, si BB_1, CC_1 se coupent en S, il suffira de projeter u de S sur u_1, et ensuite u_1 de S′ sur u'.

Les deux ponctuelles projectives superposées u, u' ont un second point uni à l'intersection de la droite donnée et du rayon SS′ ; le premier est AA′.

Donc, si le rayon SS′ passe par le point uu_1, les deux ponctuelles projectives u, u' auront un seul point uni. Si l'on voulait construire sur une droite donnée deux ponctuelles projectives superposées, pour lesquelles AA′ soit un couple de points correspondants, et M le seul point uni (*fig.* 59 *bis*), il faudrait projeter d'un point quelconque S′ le point A′ en

Fig. 59 *bis*.



A_1 sur la droite u_1 menée arbitrairement par M ; construire le point S commun à AA_1, S′M ; puis, pour trouver le point B′ de u' correspondant à un point B de u, projeter B de S en B_1, et B_1 de S′ en B′.

Si deux faisceaux U, U′ (n° 66 à droite) doivent être superposés, c'est-à-dire si les six rayons donnés aa' bb' cc' passent par un même point, on commencera par couper $a'b'c'$ par une transversale et projeter les points d'intersection d'un centre quelconque U_1. Si les rayons projetants sont a_1, b_1, c_1, nous aurons à considérer les deux faisceaux non superposés U, U_1.

Nous pourrons aussi couper *abc* par une transversale en ABC, et *a′b′c′* par une autre transversale en A′B′C′, puis opérer sur les deux ponctuelles ABC..., A′B′C′... de la manière exposée plus haut.

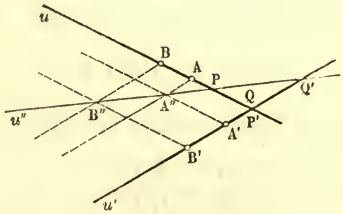
Nous ne donnons pas les figures qui correspondent à ces constructions, afin que l'élève les fasse lui-même : c'est un exercice utile. On obtiendrait encore ici une notable simplification si, parmi les rayons donnés, il y en avait un uni ; si, par exemple, *a* et *a′* se confondaient en un seul rayon, etc.

§ XI. — Cas particuliers et exercices.

73. On dit que deux ponctuelles sont *semblables* quand aux points A, B, C, D,... de l'une d'elles correspondent des points de l'autre A′, B′, C′, D′,..., tels que le rapport de deux segments correspondants AB et A′B′, AC et A′C′,... soit un nombre constant. Si ce nombre est l'*unité*, les ponctuelles sont dites *égales*.

Deux ponctuelles semblables sont projectives, parce que tout rapport anharmonique, (ABCD) par exemple, sera égal à son correspondant (A′B′C′D′). Autrement, supposons les deux droites dans un même plan (*fig.* 60), et désignons leur point

Fig. 60.



commun par P′ si on le considère comme appartenant à *u′*, et par Q si on le considère comme appartenant à *u*. Soient ensuite AA′ un couple quelconque de points correspondants ; P le point de *u* qui correspond à P′ ; Q′ le point de *u′* qui correspond à Q. Menons AA″ parallèle à *u′* et A′A″ parallèle à *u*. Dans les triangles PQQ′, PAA″, les angles en Q, A sont égaux et compris entre des côtés proportionnels, en vertu de l'hypothèse

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{PA}{P'A'} = \frac{PA}{AA''}.$$

Il suit de là que les points P, Q′, A″ sont en ligne droite; donc, si l'on projette la ponctuelle ABC... sur PQ′ en A″B″C″... par des droites parallèles à u', puis la ponctuelle A″B″C″... sur u' par des droites parallèles à u, on obtiendra la ponctuelle A′B′C′....

Si PQ = P′Q′, c'est-à-dire si la droite PQ′ fait des angles égaux avec les droites données, les ponctuelles u, u' sont égales.

Au point à l'infini de u correspond le point à l'infini de u'.

74. Réciproquement, si les points à l'infini I, I′ de deux ponctuelles projectives u, u' se correspondent, les ponctuelles sont semblables. En effet (*fig.* 60), si l'on projette u de I′ et u' de I (comme au n° 67, à gauche), on obtient deux faisceaux de rayons parallèles dont les rayons correspondants se coupent sur la droite fixe u''. Les segments A″B″ de u'' sont alors proportionnels aux segments AB de u, ainsi qu'aux segments A′B′ de u'; par suite, les segments AB de u sont proportionnels aux segments A′B′ de u'.

Autrement, si AA′, BB′, CC′ sont trois couples de points correspondants, et si I, I′ sont les points à l'infini, nous avons l'égalité des rapports anharmoniques (n° 58)

$$(ABCI) = (A'B'C'I'),$$

ou bien, puisque I, I′ sont à l'infini (n° 53),

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'},$$

équation qui exprime précisément la proportionnalité des segments correspondants.

Exemples. — En coupant un faisceau de rayons (dont le centre soit à distance finie) par deux transversales parallèles, on obtient deux ponctuelles semblables.

Deux sections quelconques d'un faisceau de rayons parallèles sont des ponctuelles semblables.

Dans ces deux exemples, les ponctuelles sont aussi perspectives; le point uni est à distance infinie dans le premier cas, et à distance finie (en général) dans le second.

75. Deux faisceaux projectifs de rayons, dont les centres sont l'un et l'autre à l'infini, sont dits *semblables*, si une section de l'un est semblable à une section de l'autre. Alors deux autres sections quelconques des deux faisceaux seront aussi semblables entre elles.

76. De l'égalité des rapports anharmoniques on conclut que deux ponctuelles égales sont projectives (n° 61), et que, *vice versâ*, deux ponctuelles projectives sont égales (n° 53) si les segments correspondants compris entre les points de deux ternes correspondants ABC et A'B'C' sont égaux, c'est-à-dire si l'on a $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ (d'où il résulte que $B'C' = BC$).

Exemples. — Si l'on coupe un faisceau de rayons parallèles par deux transversales également inclinées sur les rayons, on obtient deux ponctuelles égales.

Si l'on coupe un faisceau de rayons (non parallèles) par deux transversales parallèles et également distantes du centre du faisceau, on obtient deux ponctuelles égales.

77. Deux ponctuelles semblables superposées, ayant déjà un point uni N à distance infinie, en ont encore un autre M qui est généralement à distance finie. Si AA', BB' sont deux couples de points correspondants, on aura

$$MA : MA' = AB : A'B' = \text{const.}$$

Il suffira donc de diviser le segment AA' en deux parties MA, MA' ayant entre elles un rapport donné.

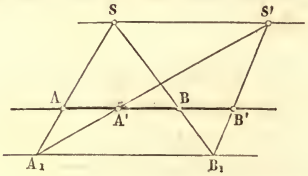
La fraction MA : MA' est (n° 53) le rapport anharmonique (AA'MN). Si sa valeur est -1, le groupe AA'MN sera harmonique (n° 54), c'est-à-dire que M sera le point milieu de AA' ainsi que de tout autre segment analogue BB',...; cela revient à dire que les deux ponctuelles se composent des couples de points équidistants d'un point fixe M.

Mais si ce rapport constant est égal à $+1$, c'est-à-dire si MA et MA' doivent être égaux de grandeur et de signe, le point M sera à l'infini. En effet, puisque $(AA'MN) = 1$, on a $(NMA'A) = 1$ (n° 56); par suite (n° 57) les points M et N se confondent.

Il résulte aussi de la construction du n° 72 (*fig.* 59 *bis*) que *deux ponctuelles projectives superposées, ayant un seul point uni à l'infini, sont égales*. Si le point M passe à l'infini, les droites SS', A_1B_1 deviennent parallèles à la droite donnée u ou u' (*fig.* 59 *ter*), et comme les triangles SA_1B_1, $S'A_1B_1$ ont une base commune, parallèle à la droite des sommets, les segments qu'ils interceptent sur une parallèle quelconque à la base

sont égaux ; donc AB = A′B′ ; ou bien *deux segments correspondants sont égaux ;* par suite AA′ = BB′,..., c'est-à-dire *le segment intercepté entre*

Fig. 59 *ter.*



deux points correspondants est constant. On peut donc supposer que les deux ponctuelles sont engendrées par un segment AA′ donné de grandeur et de direction, qui court sur une droite donnée : l'une des extrémités A du segment décrit l'une des ponctuelles, l'extrémité A′ décrit l'autre ponctuelle.

Vice versâ, il est évident que, si un segment AA′ donné de grandeur et de direction court sur une droite donnée, ses extrémités A et A′ décrivent deux ponctuelles égales et par suite projectives, douées d'un seul point uni, qui sera à distance infinie.

78. On dit que deux faisceaux de rayons sont *égaux* quand aux éléments de l'un correspondent respectivement les éléments de l'autre, de telle manière que l'angle de deux éléments quelconques de la première forme soit égal à l'angle des éléments correspondants.

Il est évident que l'on peut toujours couper deux faisceaux égaux par deux transversales, de manière que les ponctuelles résultantes soient égales ; mais deux ponctuelles égales sont toujours projectives : donc aussi *deux faisceaux égaux sont toujours projectifs.*

Vice versâ, deux faisceaux projectifs de rayons *abcd*..., *a′b′c′d′*... sont égaux quand trois rayons *a*, *b*, *c* de l'un et les trois rayons correspondants *a′*, *b′*, *c′* de l'autre forment deux figures égales : cela peut se démontrer en coupant les deux faisceaux par deux transversales, de manière que les sections ABC, A′B′C′ des groupes *abc*, *a′ b′c′* soient égales. Les ponctuelles projectives qui en résultent sont égales (n° 76) et, par suite, les autres angles correspondants *ad* et *a′d′*,... des faisceaux proposés sont aussi égaux entre eux.

79. Deux formes (ponctuelles ou faisceaux) égales étant toujours projectives, nous pouvons conclure que, si l'on transporte dans l'espace une ponctuelle ou un faisceau sans altérer la position relative de ses éléments, cette forme dans sa nouvelle position sera projective avec la même forme dans sa position primitive.

80. Deux faisceaux égaux de rayons $abcd\ldots$, $a'b'c'd'\ldots$ étant donnés dans un plan, si un rayon de l'un des faisceaux tourne autour de son centre en décrivant le faisceau lui-même, le rayon correspondant décrira l'autre faisceau en tournant dans le même sens ou en sens opposé. Dans le premier cas, on dit que les deux faisceaux sont *directement égaux*, et dans le second qu'ils sont *inversement égaux*.

Dans le premier cas, il est évident que les angles aa', bb', cc',... sont tous égaux (en grandeur et en signe). Par suite, deux rayons correspondants seront toujours parallèles ou ne le seront jamais.

Dans le second cas, deux angles correspondants sont égaux en grandeur, mais de signe opposé. Par suite, si l'on transporte l'un des faisceaux parallèlement à lui-même, de manière à faire coïncider son centre avec celui du second faisceau, les bissectrices des angles de deux rayons correspondants a, a' seront évidemment les rayons unis des deux faisceaux superposés qui sont encore projectifs (n° 79); d'où il suit que ces rayons seront aussi les bissectrices des angles d'un autre couple quelconque de rayons correspondants. Donc, si l'on suppose de nouveau que les faisceaux ne soient pas concentriques, *ils ont deux couples de rayons correspondants parallèles; et, dans chaque faisceau, ces deux rayons sont perpendiculaires entre eux*, puisqu'ils ont les directions des bissectrices des angles d'un couple quelconque de rayons correspondants.

81. Si deux faisceaux de rayons $abcd\ldots$, $a'b'c'd'\ldots$ sont projectifs et si les angles aa', bb', cc' de trois couples de rayons correspondants sont égaux et de même sens, l'angle d'un autre couple quelconque dd' de rayons correspondants aura aussi la même grandeur et le même sens. En effet, transportons le premier faisceau parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il soit

concentrique au second, et faisons-le tourner ensuite autour du centre commun d'un angle égal à aa'; les rayons a, b, c coïncideront respectivement avec les rayons a', b', c', et les deux faisceaux, qui n'ont pas cessé d'être projectifs (n° 79), auront trois rayons unis et, par suite (n° 64), tout autre rayon coïncidera de même avec son correspondant. En remettant ensuite le premier faisceau dans sa position primitive, l'angle dd' sera égal à aa'.

82. Les angles aa', bb', cc',... de deux faisceaux directement égaux étant égaux entre eux, il s'ensuit que deux faisceaux directement égaux et ayant le même centre O peuvent être regardés comme engendrés par la rotation d'un angle aa', de grandeur invariable, autour de son sommet fixe O ; l'un des côtés a engendre l'un des faisceaux, l'autre côté a' engendre l'autre faisceau.

Vice versâ, si un angle de grandeur invariable tourne autour de son sommet, ses deux côtés engendrent des faisceaux (directement) égaux et, par suite, projectifs. Il est évident que ces faisceaux projectifs n'ont aucun rayon uni.

Une transversale qui coupe ces deux faisceaux détermine deux ponctuelles projectives superposées et n'ayant pas de points unis.

On pourrait répéter, sans aucun changement, pour deux faisceaux de plans dans l'espace à trois dimensions, ce qui a été dit aux n°s 78-81 pour deux faisceaux de rayons contenus dans un même plan.

83. Projetons de deux points différents U, U', au moyen des faisceaux abc..., $a'b'c'$..., les ponctuelles projectives ABC..., A'B'C'... superposées sur une même droite. Soient i, j' les rayons parallèles à la droite donnée qui passent respectivement par U, U', et i', j leurs rayons correspondants. Les points I', J où ces deux derniers rayons coupent la droite donnée seront les points qui correspondent au point à l'infini (I ou J') de la droite donnée, suivant que l'on considère ce dernier comme appartenant à la ponctuelle ABC... ou comme appartenant à la ponctuelle A'B'C'....

La projectivité des deux groupes correspondants nous donne (n° 59) une égalité entre les rapports anharmoniques, d'où l'on tire

$$(1) \qquad JA.I'A' = JB.I'B' = \text{const},$$

c'est-à-dire que le produit $JA.I'A'$ est une quantité constante, quel que soit le couple AA'. Soient O le point milieu du segment JI', et O' le point qui correspond à O, regardé comme point de la première ponctuelle. Comme l'équation (1) subsiste pour tout couple de points correspondants et, par suite, pour OO', nous aurons

$$(2) \qquad JA.I'A' = JO.I'O',$$

ou bien

$$(OA - OJ)(OA' - OI') + OJ(OO' - OI') = 0,$$

et comme

$$OI' = -OJ,$$

nous avons aussi

$$(3) \qquad OA.OA' - OI'(OA - OA' + OO') = 0.$$

Demandons-nous maintenant s'il existe des *points unis;* appelons E un tel point : l'équation précédente aura lieu en remplaçant A et A' par E ; donc

$$(4) \qquad \overline{OE}^2 = OI'.OO'.$$

D'où il résulte que, si $OI'.OO'$ est positif, c'est-à-dire si O ne se trouve pas entre I et O', il y a deux points unis E, F, dont O est le point milieu et qui divisent harmoniquement les points I', O' (n° 55).

Si O se trouve entre I' et O', il n'y a pas de points unis.

Si O' coïncide avec O, il y a un seul point uni qui est le point O lui-même.

Imaginons que les deux ponctuelles soient décrites chacune par un point se mouvant toujours dans le même sens ([1]). Si l'une est parcourue dans le sens ABC, l'autre sera parcourue dans le sens A'B'C', qui sera ou égal ou opposé au premier.

Si les sens ABC, A'B'C' sont opposés, IJA, I'J'A' seront aussi de sens opposés ; il en sera de même du segment fini JA et du segment infini I'A', c'est-à-dire que les segments finis JA et I'A' ont le même sens. En vertu de l'équation (2) JO, I'O' auront alors le même sens ; donc O ne tombe pas entre I' et O' (*fig.* 61, *a*) : par suite il y a deux points unis. Comme OE est moyenne proportionnelle entre OI', OO', les points unis tomberont en dehors du segment fini JI'.

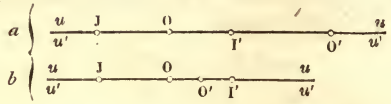
Si les sens ABC, A'B'C' sont égaux, on arrive, de la même manière, à cette conséquence que JA et I'A', ainsi que JO et I'O', sont de sens opposés. Alors il y aura des points unis si O n'est pas entre I'O', c'est-à-

---

([1]) *Voir* STEINER, *loc. cit.*, p. 61.

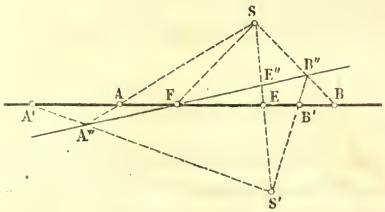
dire si O′ est entre O et I′ (*fig.* 61, *b*). Comme OE est moyenne proportionnelle entre OI′, OO′, les points unis tomberont dans l'intérieur du segment JI′.

Fig. 61.



Supposons qu'il y ait deux points unis EF (*fig.* 62) ; menons par E une droite quelconque et de deux points S, S′ pris sur cette droite projetons respectivement les deux ponctuelles. Les deux faisceaux sont perspectifs à cause du rayon uni SES′; par suite, les rayons correspondants

Fig. 62.



SA et S′A′, SB et S′B′,..., SF et S′F′ se couperont en des points situés sur une droite passant par F.

Soit E″ le point où cette droite coupe SS′ ; alors EFAA′, EFBB′ seront respectivement les projections de EE″SS′ faites des centres A″, B″; donc les groupes EFAA′, EFBB′ seront projectifs ; ce qui revient à dire que le rapport anharmonique du groupe formé par les deux points unis et par deux points correspondants quelconques est constant. Donc :

Deux formes projectives superposées, douées de deux éléments unis, sont composées de couples d'éléments qui, avec deux éléments fixes, donnent un rapport anharmonique constant [1].

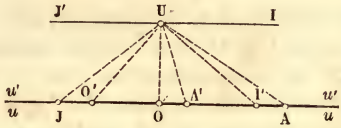
S'il n'y a pas de points unis, c'est-à-dire si O se trouve entre O′ et I′ (*fig.* 63), élevons en O une perpendiculaire OU à la droite donnée, telle que OU soit moyenne proportionnelle entre I′O et OO′, c'est-à-dire que l'angle I′UO′ soit droit. En outre, menons par U la droite IUJ′ parallèle à la droite donnée, l'angle IUI′ sera égal à l'angle JUJ′, l'angle OUO′ égal à

---

[1] La construction qui précède résout le problème : étant donnés deux couples de points correspondants AA′, BB′ et un point uni E, trouver l'autre point uni.

l'angle OI'U et, par suite, à IUI'. Donc, dans les deux faisceaux projectifs, qui projettent les deux ponctuelles données à partir de U, les angles IUI',

Fig. 63.



JUJ', OUO' de trois couples de rayons correspondants sont égaux ; les angles AUA', BUB'... (n° 81) sont aussi égaux et de même sens [1]. Donc :

On peut toujours considérer deux ponctuelles projectives superposées sans points unis comme engendrées par les intersections de la droite donnée avec les côtés d'un angle de grandeur constante qui tourne autour de son sommet.

84. Nous avons vu (n° 66) comment on résout en général le problème : étant donnés trois couples d'éléments correspondants de deux formes (de première espèce) projectives, construire autant de couples que l'on veut, ou bien construire l'élément d'une forme qui correspond à un élément donné de l'autre. L'élève studieux pourra s'exercer à résoudre les cas particuliers suivants :

1° On supposera que les deux ponctuelles u, u' ne soient pas superposées et que les couples d'éléments donnés soient

(a)	P et P',	Q et Q' [2],	A et A';
(b)	P et P',	A et A',	B et B';
(c)	I et I',	J et J',	P et P';
(d)	I et I',	J et J',	A et A';
(e)	I et I',	P et P',	Q et Q';
(f)	I et I',	P et P',	A et A';
(g)	I et I',	A et A',	B et B';

2° Si les ponctuelles sont superposées, résoudre les problèmes (d) et (g).

---

[1] Chasles, *loc. cit.*, p. 119.

[2] P, P', Q, Q', I, I', J, J' ont les significations données au n° 66. A, B,... sont des points donnés arbitrairement.

3° Si les formes sont deux faisceaux (de rayons) non concentriques, résoudre les problèmes corrélatifs à (a) et (b).

4° On supposera que l'un des faisceaux ait son centre à l'infini.

5° On supposera que les deux faisceaux aient leurs centres à l'infini.

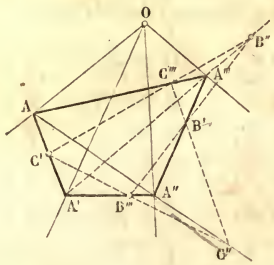
85. On peut aussi démontrer le théorème suivant :

Si les trois sommets A' A'' A''' d'un triangle variable parcourent trois droites fixes u, u', u'' qui concourent en un point, et si deux de ses côtés A'A'', A''A tournent respectivement autour de deux points fixes O O', le troisième côté AA' passera aussi par un point fixe O'', situé sur la droite OO'.

Il suffira de démontrer que les points A, A', A'' décrivent dans leur mouvement trois ponctuelles perspectives deux à deux ; ou bien, on observera que l'on peut appliquer le théorème du n° 12 à deux positions du triangle variable.

Ce théorème établi, on en déduit immédiatement le corollaire suivant : si les sommets d'un quadrangle variable AA'A''A''' parcourent quatre droites fixes qui concourent en un point O, pendant que trois côtés AA', A'A'', A''A''' tournent autour de trois points fixes C', B''', B', le quatrième côté A'''A et les diagonales AA'', A'A''' passeront par trois autres points fixes C''', C'', B'' déterminés par les trois premiers. Les six points fixes sont les sommets d'un quadrilatère complet, ce qui revient à dire qu'ils sont alignés trois à trois sur quatre droites (*fig.* 64).

Fig. 64.



On conclut de la même manière le corollaire analogue, relatif à un polygone de n sommets.

86. Théorème. — *Si un triangle* $O_1O_2O_3$ *est circonscrit à un triangle* $U_1U_2U_3$, *il existe une infinité de triangles inscrits au second et circonscrits au premier* (*fig.* 65).

En effet, en projetant la ponctuelle $U_2U_3\ldots$ de O_2 et de O_3, nous au-

rons les faisceaux perspectifs

$$O_2(U_1, U_2, U_3, \ldots), \quad O_3(U_1, U_2, U_3, \ldots);$$

de même, si nous projetons la ponctuelle $U_1 U_3$ de O_1 et de O_3, nous aurons les faisceaux perspectifs

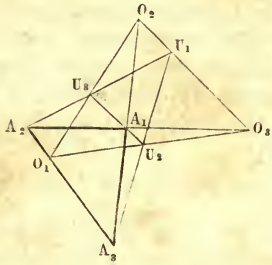
$$O_1(U_1, U_2, U_3, \ldots), \quad O_3(U_1, U_2, U_3, \ldots).$$

Donc les faisceaux

$$O_1(U_1, U_2, U_3, \ldots), \quad O_2(U_1, U_2, U_3, \ldots)$$

sont projectifs; mais les rayons $O_1 U_3$, $O_2 U_3$ coïncident, ces deux faisceaux sont donc perspectifs et leur commune intersection est $U_1 U_2$. Nous avons

Fig. 65.



ainsi les trois faisceaux O_1, O_2, O_3 qui sont perspectifs deux à deux et ont pour sections communes

Le premier et le deuxième, la droite $U_1 U_2$,
Le deuxième et le troisième, la droite $U_2 U_3$,
Le troisième et le premier, la droite $U_3 U_1$.

Ce qui revient à ceci, que tout terne de rayons correspondants formera un triangle circonscrit à $O_1 O_2 O_3$ et inscrit à $U_1 U_2 U_3$ (¹).

87. Théorème. — *Une droite mobile autour d'un point fixe* U *coupe deux droites* u, u' *aux points* A, A'; *deux points* S, S' *en ligne droite avec* uu' *étant donnés, l'intersection* M *des droites* SA, S'A' *décrit une droite* (²).

(¹) Steiner, *loc. cit.*, p. 85.

(²) Pappus, *loc. cit.*, Liv. VII, p. 123, 139; 141, 143. — Cfr. Chasles, *loc. cit.*, p. 242.

Ce théorème se démontre en remarquant que les points A, A′ engendrent deux ponctuelles projectives et que, par conséquent, les faisceaux engendrés par les rayons mobiles SA, S′A′ sont perspectifs (nos 35 et 62).

Nous proposons aussi de démontrer le théorème corrélatif.

88. Théorème. — U, S, S′ *sont trois points donnés en ligne droite; une transversale qui rencontre deux droites fixes u, u′ en deux points* AA′ *tourne autour de* U; *le point* M *commun aux droites* SA, S′A′ *engendre une droite passant par le point uu′* (1).

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

Ce théorème peut aussi s'énoncer comme il suit :

Si les côtés d'un triangle variable AA′M *tournent autour de trois points fixes* U, S, S′, *situés en ligne droite, pendant que deux de ses sommets parcourent deux droites fixes u, u′, le troisième sommet* M *décrira aussi une droite* (2).

On peut démontrer de la même manière l'énoncé plus général :

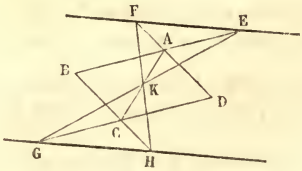
Si un polygone de n côtés se déforme de manière que tous ses côtés passent par autant de points fixes, tous en ligne droite, pendant que $n-1$ *sommets parcourent des droites fixes, le dernier sommet et le point de concours de deux côtés non consécutifs quelconques décriront aussi des lignes droites* (3).

La proposition corrélative est indiquée au n° 85.

89. *Problème.* — Par un point P donné dans le plan d'un parallélogramme ABCD, mener, au moyen de la règle seulement, la parallèle à une droite EF située dans le même plan.

Soient (*fig.* 66) E, F les points où la droite donnée rencontre les côtés

Fig. 66.



AB, AD; prenons arbitrairement un point K sur AC, tirons EK, FK qui coupent respectivement CD, BC en G, H. Les triangles AEF, CGH sont

(1) Chasles, *loc. cit.*, n° 334.

(2) *Porisme* d'Euclide. Cfr. Pappus, *loc. cit.*, préface du Livre VII.

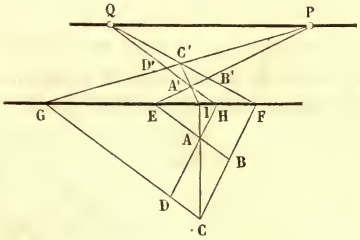
(3) *Porisme* de Pappus, *loc. cit.*, préface du Livre VII.

homologiques (n° 16), parce que les droites AC, EG, FH concourent en K; l'axe d'homologie est la droite à l'infini, parce que les côtés AE, AF du premier triangle sont respectivement parallèles aux côtés correspondants du second. Donc les autres côtés EF, GH sont aussi parallèles [1].

Le problème est ainsi ramené à un autre problème déjà résolu (n° 69) : Étant données deux parallèles EF, GH, mener par un point P une parallèle aux droites données.

Voici une autre solution due à Lambert [2]. Prolongeons (*fig.* 67) les côtés AB, BC, CD, DA et une diagonale AC du parallélogramme donné

Fig. 67.



jusqu'à la rencontre de EF aux points E, F, G, H, I; menons une droite quelconque par I qui coupe les droites EP, GP en A', C'; si Q est le point de concours des droites HA', FC', la droite demandée sera PQ.

En effet, désignons par B', D' les points où EP, GP coupent respectivement FQ, HQ, les quadrilatères ABCD, A'B'C'D' sont homologiques, EF étant l'axe d'homologie; le point P correspond au point de concours de AB, CD, et le point Q au point de concours de BC, AD. Donc PQ est la droite limite de la seconde figure, et, par suite, PQ est parallèle à EF (n° 16).

Problème. — On donne un cercle et son centre; tracer, au moyen de la règle seulement, une perpendiculaire à une droite donnée.

Menons deux diamètres AC, BD dans le cercle (*fig.* 68). La figure ABCD sera un rectangle. Par suite, si l'on prend un point K quelconque de la circonférence, on pourra, au moyen de la proposition qui précède, tracer KL parallèle à la droite donnée EF. Joignant alors le second point L, commun à KL et à la circonférence, à la seconde extrémité M du diamètre

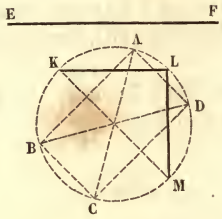
---

[1] Poncelet, *Propriétés projectives*, n° 198 (Paris, 1822).

[2] *Freie Perspective*, t. II, p. 169 (Zurich, 1774).

qui passe par K, la droite LM sera évidemment perpendiculaire à KL, et, par suite, aussi à la droite donnée.

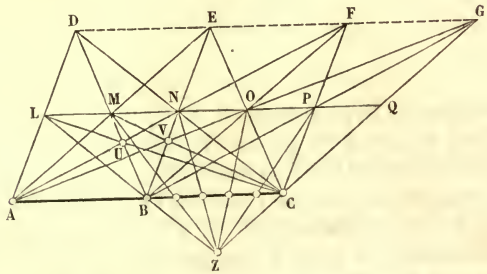
Fig. 68.



Problème. — B est le point milieu de la droite AC; on veut diviser BC en n parties égales, en ne se servant que de la règle.

Construisons (*fig.* 69) un quadrilatère ULDN, dont deux côtés opposés

Fig. 69.



DL, NU concourent en A, les deux autres côtés opposés LU, DN en C, et dont une diagonale DU passe en B; l'autre diagonale LN sera parallèle à AC (n° 51) et coupée en deux parties égales; en M, par DU (n° 48). Construisons maintenant un second quadrilatère VMEO, sous les mêmes conditions que le précédent, et qui soit tel, en outre, que M et N soient une extrémité et le point milieu de la diagonale parallèle à AC; ou, en d'autres termes, menons les droites AM, BN qui se coupent en E, la droite CE qui coupe en O le prolongement de LN, de manière que nous aurons NO = MN = LM. Construisons un troisième quadrilatère analogue aux deux premiers, de manière que N soit une extrémité et O le milieu de la diagonale parallèle à AC. Si P est la seconde extrémité de cette diagonale, nous aurons donc OP = NO = MN = LM. Continuons ensuite de la même manière jusqu'à ce que le nombre des segments égaux LM, MN, NO, OP,... soit égal à n; si PQ est le dernier segment obtenu, tirons les

droites LB, QC qui concourent en Z; les droites qui joindront Z aux points M, N, O, P,... diviseront BC en n parties égales. C'est ce que l'on demandait [1].

On peut résoudre de même, au moyen de la règle seulement, les problèmes suivants :

Étant données deux droites parallèles AB et u, diviser AB en deux parties égales (n° 51).

Étant donnés une droite AB et son point milieu C, mener par un point donné la parallèle à AB (n° 51).

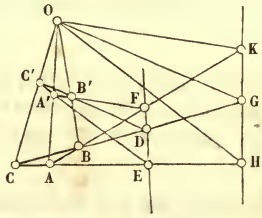
Étant donnés un cercle et son centre, diviser en deux parties égales un angle donné (n° 52).

Étant donnés deux angles égaux et adjacents AOC, COB, mener par O la perpendiculaire à OC (n° 52).

90. Théorème. — *Deux triangles* ABC, A′B′C′, *situés dans des plans différents* σ, σ' *étant perspectifs, si l'on fait tourner le plan de l'un d'eux autour de* $\sigma\sigma'$, *le point* O *où concourent les rayons* AA′, BB′, CC′ *change de position et décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite* $\sigma\sigma'$ [2].

Soient D, E, F (*fig.* 70) les points de la droite $\sigma\sigma'$ où concourent les couples de côtés correspondants BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′ (n° 14).

Fig. 70.



Par O, centre de projection des deux triangles ABC, A′B′C′, considérés dans une position déterminée de leurs plans, menons les droites OG, OH, OK respectivement parallèles aux côtés du triangle A′B′C′; ces droites se trouvant dans un même plan π, parallèle à σ', rencontreront le plan σ en trois points G, H, K de la droite $\pi\sigma$.

Imaginons maintenant que le plan σ' tourne autour de la droite $\sigma\sigma'$, en

---

[1] Ce problème et d'autres à résoudre au moyen de la règle seulement se trouvent dans l'ouvrage précité de Lambert.

[2] Chasles, *loc. cit.*, nos 368, 369.

entraînant avec lui le triangle A′B′C′. Le groupe des quatre points BCDG est perspectif avec le groupe B′C′DG′, où G′ désigne le point à l'infini de B′C′; par suite, le rapport anharmonique (BCDG) est égal à (B′C′DG′), ou bien (n° 53) à B′D : C′D, quantité constante. Donc, B, C, D étant trois points fixes, G sera aussi un point déterminé et invariable (n° 53). Les triangles semblables OBG, B′BD donnent

$$OG : B'D = BG : BD,$$

d'où

$$OG = \frac{B'D.BG}{BD},$$

ce qui veut dire que OG est une quantité constante. Par conséquent, le point O se meut sur une sphère dont le centre est G et le rayon la constante ci-dessus.

On démontre de la même manière que le point O, se meut sur deux autres sphères dont les centres sont les points H, K.

La ligne décrite par le point O, devant se trouver simultanément sur plusieurs sphères, est donc une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne qui renferme les centres des sphères, et dont le centre est sur cette même droite [1].

Cette droite GHK, commune aux plans π, σ, et, par suite, parallèle à $\sigma\sigma'$ (puisque les plans π, σ' sont parallèles), est la droite de fuite ou droite limite de la figure σ, considérée comme image perspective de la figure σ' (n° 11).

91. Théorème. — *Deux faisceaux projectifs, ayant le même centre* O, *placés dans un même plan* σ *et privés de rayons unis, peuvent être considérés comme l'image perspective de deux faisceaux directement égaux* [2].

Coupons les deux faisceaux par une transversale s; nous obtiendrons deux ponctuelles projectives ABC..., A′B′C′..., superposées et privées de points unis. Menons par s un plan σ' quelconque; on peut déterminer dans ce plan un point U (n° 83) tel, que l'on puisse projeter de ce point les segments AA′, BB′, CC′,... sous un angle constant; cela veut dire qu'en projetant de U les deux ponctuelles on obtient deux faisceaux directement égaux. Si maintenant on place l'œil en un point quelconque de la droite OU et que l'on projette de ce point sur le plan σ' les faisceaux donnés, on obtiendra précisément les deux faisceaux directement égaux.

---

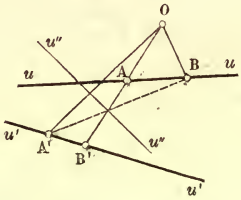
(1) Baltzer, *Stéréom.*, p. 31.

(2) Chasles, *loc. cit.*, n° 180.

§ XII. — Involution.

92. Soit O le centre de deux faisceaux projectifs concentriques (*fig.* 71) coupés respectivement par les transversales

Fig. 71.



u, u' et qui déterminent ainsi deux ponctuelles projectives ABC..., A′B′C′...; soit aussi u'' la droite sur laquelle se coupent les couples de droites AB′ et A′B,... (n° 67, à gauche). Un rayon (non uni), mené arbitrairement par O, coupera u, u' en deux points non correspondants A, B′, et rencontrera u'' en un point de la droite A′B. Il résulte de là que, au rayon OA du premier faisceau correspond le rayon OA′ de l'autre; et que, au rayon OB′ de celui-ci, correspond le rayon OB de celui-là. En d'autres termes, à un rayon OA ou OB′ correspondent deux rayons OA′, OB distincts entre eux, suivant que l'on considère le premier rayon comme appartenant à l'un ou à l'autre faisceau. En effet, la droite A′B doit rencontrer AB′ sur u'' et ne peut passer par le point O, que l'on suppose placé en dehors de u''.

Donc, *en général* [1], *dans deux formes projectives superposées* (*de première espèce*), *à un même élément correspondent deux éléments distincts, suivant que le premier est considéré comme élément de l'une ou de l'autre forme.*

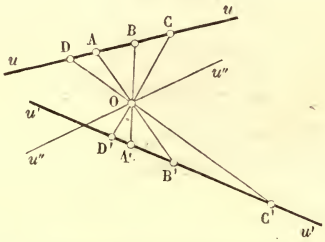
---

[1] Nous disons deux formes, parce que le raisonnement que nous avons fait sur deux faisceaux concentriques de rayons peut se répéter pour deux ponctuelles superposées ou pour deux faisceaux de plans ayant le même axe. On peut arriver au même résultat en coupant les deux faisceaux de rayons par une transversale, ou en les projetant d'un centre pris en dehors de leur plan.

Nous disons *en général*, parce que le raisonnement qui précède suppose que O est en dehors de u''.

93. Mais, si O est sur u'' (*fig.* 72) et si l'on mène par O un rayon arbitraire qui coupe u, u' en A, B′, la droite A′B passera

Fig. 72.



aussi par O ; en d'autres termes, au rayon OA ou OB′ correspondra un même rayon OA′ ou OB ; ce que nous exprimerons en disant que *les deux rayons se correspondent doublement*, ou encore que *les deux rayons sont conjugués*.

Supposons, *vice versâ*, que deux faisceaux projectifs concentriques aient un couple de rayons qui se correspondent doublement. Coupons les deux faisceaux par deux transversales u et u' et nommons A, B′ les points où elles coupent le premier rayon ; le second rayon sera coupé en B, A′. La droite u'', lieu des points où se rencontrent les couples de droites MN′, M′N (n° 67) relatives aux ponctuelles projectives u, u', passera par O, parce que les droites AB′, A′B se croisent en ce point. Menons par O un rayon arbitraire qui coupe les transversales en C, D′, par exemple ; la droite C′D passera aussi par O, c'est-à-dire que les rayons OCD′, ODC′ se correspondent aussi doublement. Donc :

Si deux formes projectives superposées (*de première espèce*) *ont un couple d'éléments qui se correspondent doublement, les éléments de tout autre couple d'éléments correspondants se correspondront aussi doublement.*

94. Ce cas particulier de deux formes projectives (de pre-

mière espèce) superposées se nomme *involution* [1], involution de points, de rayons ou de plans, suivant que les éléments sont des points d'une droite, des rayons d'un faisceau ou des plans d'un faisceau.

Donc, *dans l'involution, les éléments sont conjugués deux à deux*, c'est-à-dire que chaque élément a son conjugué ; si l'on considère le premier comme appartenant à l'une ou à l'autre forme, son correspondant est son conjugué dans l'un et dans l'autre cas. Il résulte de là qu'il n'est pas nécessaire de considérer les deux formes comme étant distinctes, et que *l'on peut concevoir l'involution comme une série de couples d'éléments conjugués deux à deux.*

Si l'on dit que AA′, BB′, CC′,... forment une involution, on entendra exprimer que A et A′, B et B′, C et C′,... sont des éléments conjugués; du reste, tout élément pourra être échangé avec son conjugué, de sorte que les deux formes

$$AA'BB'CC'\ldots,$$
$$A'AB'BC'C\ldots$$

sont projectives.

95. Comme l'involution n'est qu'un cas particulier de deux formes projectives superposées, *toute section ou projection d'une involution donne une nouvelle involution* [2]. Deux éléments conjugués de l'involution donnée produisent deux éléments conjugués de la nouvelle involution. Il s'ensuit (n° 16) que la figure homologique d'une involution est aussi une involution.

96. Quand deux ponctuelles projectives superposées sont en involution, à un point quelconque, par suite, au point à l'infini (I ou J′) correspond un point unique (I′ ou J), c'est-à-dire les deux points I′ et J coïncident en un seul point, que nous nommerons O : ce point O sera donc le point conjugué

---

(1) Desargues, *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* (Paris, 1639) : édition Poudra (Paris, 1864), t. I, p. 119.

(2) Desargues, *loc. cit.*, p. 147.

du point de l'infini. L'équation (1) du n° 83 devient alors

$$OA.OA' = \text{const.}$$

En d'autres termes, une involution de points est formée par des couples de points A, A', qui jouissent de la propriété que le produit de leurs distances à un point fixe O (de la droite donnée) est constant [1]. Le point O est nommé *centre* ou *point central de l'involution.*

Les éléments unis de deux formes projectives superposées en involution sont dits *éléments doubles* de l'involution. Pour l'involution AA', BB',..., on a

$$OA.OA' = OB.OB' = \ldots = \text{const.};$$

si cette constante est positive, c'est-à-dire si O ne tombe pas entre deux points conjugués, il y aura deux points doubles E, F tels que

$$\overline{OE}^2 = \overline{OF}^2 = OA.OA' = OB.OB' = \ldots;$$

O est donc le point milieu du segment EF, et tous les groupes EFAA', EFBB',... sont harmoniques. Donc :

Si une involution a deux éléments doubles, ceux-ci divisent harmoniquement deux éléments conjugués quelconques, ou bien une involution est formée par les couples d'éléments qui donnent, avec deux éléments fixes, un groupe harmonique.

Si la constante est négative, c'est-à-dire si O tombe entre deux points conjugués, il n'y a pas de points doubles. Dans ce cas, il y a deux points conjugués équidistants de O, pour lesquels on a

$$OE = -OE' \quad \text{et} \quad \overline{OE}^2 = \overline{OE'}^2 = -OE.OE' = -OA.OA'.$$

Si la constante est nulle, il n'existe qu'un seul point double O; mais alors il n'y a pas d'involution proprement dite, car, le produit OA.OA' étant nul, dans tout couple de points conjugués il y en a un qui coïncide avec O.

97. On peut aussi démontrer, de la manière suivante, que dans toute involution douée de deux éléments doubles ceux-ci

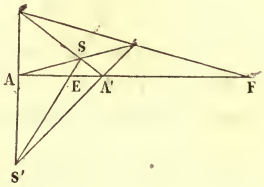
---

[1] Desargues, *loc, cit.*, p. 112 et 119.

sont divisés harmoniquement par deux éléments conjugués quelconques. Soient E, F les deux éléments doubles; A, A′ deux éléments conjugués; le groupe EFAA′ sera projectif avec le groupe EFA′A : donc (n° 65) l'un ou l'autre de ces deux groupes est harmonique.

Voici une troisième démonstration. Considérons EAA′..., EA′A... comme deux ponctuelles projectives et projetons-les respectivement de deux points S, S′ en ligne droite avec E (*fig.* 73). Les faisceaux projetants S(EAA′...), S′(EA′A...)

Fig. 73.



sont perspectifs, à cause du rayon commun SS′E; donc la droite qui joint le point commun à SA, S′A′ au point commun à SA′, S′A renfermera les intersections de tous les couples de rayons correspondants, et rencontrera, par suite, la droite donnée au second point double F. Mais alors la figure nous donne un quadrilatère complet, dans lequel la diagonale AA′ est coupée par les deux autres diagonales en E et F; donc EFAA′ est une forme harmonique (n° 48).

Le théorème actuel est un cas particulier de celui du n° 83. Nous concluons de là que les couples d'éléments (points d'une droite, rayons ou plans d'un faisceau), qui forment, avec deux éléments fixes, un rapport anharmonique constant, constituent deux formes projectives superposées, qui sont une involution dans le cas où le rapport anharmonique a pour valeur -1 (n° 54).

98. L'involution est déterminée par deux couples d'éléments conjugués. En effet, soient AA′, BB′ les couples donnés. Prenons un élément quelconque C, on construira son conjugué C′ en faisant en sorte (n° 66) que les groupes AA′BC, A′AB′C′ soient projectifs. On a coutume de dire alors que les

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

six éléments AA′, BB′, CC′ sont *en involution*, c'est-à-dire qu'ils donnent trois couples d'une involution.

Supposons qu'il s'agisse d'une involution de points; en dehors de la droite où se trouvent AA′, BB′, prenons un point quelconque G, décrivons les cercles GAA′, GBB′ qui se couperont en un second point H, et soit O le point où GH rencontre la droite donnée. Nous avons alors, d'après une propriété connue du cercle,

$$OG.OH = OA.OA' \quad \text{et} \quad OG.OH = OB.OB',$$

et par suite

$$OA.OA' = OB.OB';$$

donc le point O est le point central de l'involution déterminée par les couples AA′, BB′. Si l'on fait passer un cercle quelconque par GH et s'il rencontre la droite donnée en CC′, nous aurons

$$OG.OH = OC.OC',$$

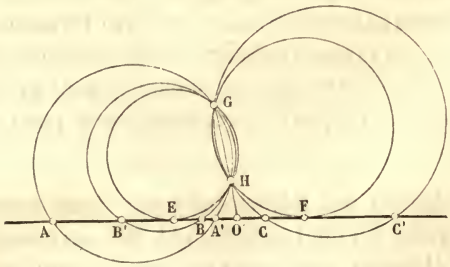
et par suite

$$OC.OC' = OA.OA' = OB.OB';$$

donc CC′ forme un couple de points conjugués de l'involution. En d'autres termes, le cercle décrit par deux points conjugués CC′ ou DD′... et par un des points G, H passera toujours par le second de ces points. Donc :

Les couples de points conjugués de l'involution ne sont autre chose que les intersections de la droite, donnée avec les cercles passant par les points G, H.

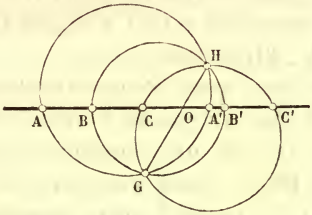
Fig. 74.



On voit, d'après ce qui précède, que si l'involution a des points doubles, ces points seront les points de contact de la

droite donnée avec deux cercles passant par GH. Nous avon déjà vu que ces points divisent harmoniquement AA′, aussi bien que BB′ (n° 96) : donc (n° 55) l'involution aura des points doubles, si l'un des deux couples AA′, BB′ est tout entier intérieur ou extérieur à l'autre (*fig.* 74) ; elle n'en aura pas si l'un des couples est divisé par l'autre (*fig.* 75) (¹).

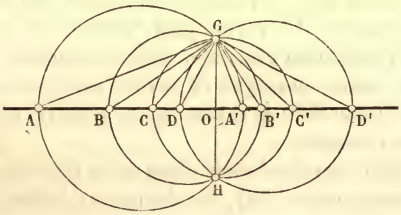
Fig. 75.



Dans le premier cas, l'involution (comme nous l'avons déjà remarqué) est formée d'une infinité de couples de points qui divisent harmoniquement un couple de points fixes.

Dans le second cas, au contraire, l'involution est marquée sur la droite donnée par les côtés d'un angle droit mobile autour de son sommet. En effet, comme les points AA′ sont divisés par BB′ (*fig.* 76), les cercles décrits sur AA′, BB′ comme

Fig. 76.



a a′ b b′ ne sont pas des points harmoniques

diamètres se coupent en deux points G et H placés symétriquement par rapport à la droite donnée ; ou, autrement, GH est perpendiculaire à la droite donnée, qui la divise en deux par-

(¹) Si l'un des segments AA′, BB′ empiète sur l'autre.

ties égales en O, centre de l'involution. Il résulte de là que

$$\overline{OG}^2 = \overline{OH}^2 = AO.OA' = BO.OB',$$

et que tous les autres cercles qui passent par GH et qui marquent sur la droite donnée les autres couples CC′, DD′,... de l'involution auront aussi leurs centres sur la droite AB,...; ils auront pour diamètres les segments CC′, DD′,.... Donc, si l'on projette du point G (ou du point H) les segments AA′, BB′, CC′,..., on obtiendra autant d'angles droits AGA′, BGB′, CGC′,... (ou AHA′, BHB′, CHC′,...).

Nous concluons donc que, si une involution de points AA′, BB′,... en ligne droite n'a pas de points doubles, c'est-à-dire si le rectangle OA.OA′ est une constante négative $-k^2$, tous les segments AA′, BB′,... sont vus sous des angles droits de tout point du cercle de rayon k, qui a son centre en O et dont le plan est perpendiculaire à la droite donnée.

Ce théorème est un cas particulier de celui du n° 83. Donc, si un angle de grandeur constante tourne dans son plan autour de son sommet, ses côtés déterminent sur une transversale fixe deux ponctuelles projectives, qui sont en involution dans le cas où l'angle est droit.

99. Considérons une involution de rayons parallèles entre eux, c'est-à-dire ayant un point commun à distance infinie. La droite à l'infini est un rayon de l'involution; le rayon qui lui est conjugué contient le centre de l'involution des points que l'on obtient en faisant une section par une transversale quelconque. Ce rayon peut, pour ce motif, être nommé *rayon central* de l'involution proposée. Réciproquement, si l'on projette une involution de points au moyen de rayons parallèles, ceux-ci forment une nouvelle involution dont le rayon central passera par le point central de l'involution donnée.

Lorsque l'on déduit une involution d'une autre involution au moyen de projections ou de sections (n° 95), les éléments doubles de la première donnent toujours naissance aux éléments doubles de la seconde.

100. De ce que dans une involution un groupe quelconque d'éléments est projectif avec le groupe des éléments conjugués, il résulte que, si l'on prend arbitrairement quatre points d'une involution, leur rapport anharmonique sera égal à celui de leurs conjugués. Par exemple, étant donnée l'involution AA′, BB′, CC′,... les groupes ABA′C′, A′B′AC seront

projectifs, et l'on aura

$$\frac{AA'}{BA'} : \frac{AC'}{BC'} = \frac{A'A}{B'A} : \frac{A'C}{B'C},$$

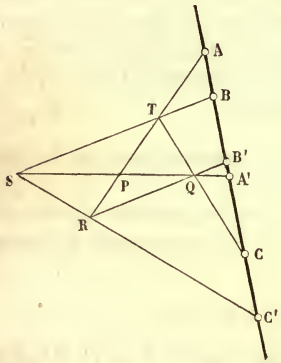
ou

$$AB'.BC'.CA' + A'B.B'C.C'A = 0.$$

Inversement, si cette relation existe entre les segments déterminés par les points AA'BB'CC' d'une droite, ceux-ci forment des couples en involution. En effet, la relation ci-dessus équivaut à l'égalité des rapports anharmoniques (ABA'C'), (A'B'AC) : ces groupes sont donc projectifs ; mais A et A' se correspondent doublement ; donc (n° 93), etc.

101. Soit (*fig.* 77) un quadrangle complet QRST dont les côtés opposés RT et QS, ST et QR, QT et RS

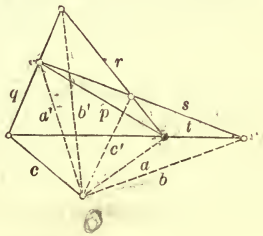
Fig. 77.



sont coupés par une transversale quelconque en A et A', B et B', C et C' ; soit P l'intersection de QS et RT. ATPR est la projection de ACA'B' du centre Q, et, en même temps, la projection de ABA'C' du centre S ; donc le groupe ACA'B' est projectif à ABA'C' ou (n° 56) A'C'AB. Les points A et A' se correspondent doublement dans les groupes projectifs ACA'B', A'C'AB ; donc (n° 93) AA', BB', CC' sont trois

Soit (*fig.* 78) un quadrilatère complet *qrst*, dont les sommets opposés *rt* et *qs*, *st* et *qr*, *qt* et *rs*

Fig. 78.



sont projetés d'un centre quelconque par les rayons *a* et *a'*, *b* et *b'*, *c* et *c'* ; et soit *p* la droite qui joint *qs* et *rt*. Les faisceaux *atpr*, *aca'b'* sont projectifs, car ils sont perspectifs (leur section commune est *q*) ; de même *atpr*, *aba'c'* sont perspectifs (leur section commune est *s*) et, par suite, projectifs. Donc le faisceau *aca'b'* est projectif au faisceau *aba'c'*, ou (n° 56) au faisceau *a'c'ab*. Les rayons *a*, *a'* se

couples de points conjugués d'une involution; ou :

Les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet sont coupés par une transversale quelconque en trois couples de points conjugués en involution (¹).

Ou, en d'autres termes :

Si un quadrangle complet se déforme de manière que cinq de ses côtés passent par autant de points fixes, donnés en ligne droite, le sixième côté tournera aussi autour d'un point fixe de la même droite, qui constitue, avec les cinq premiers, une involution de six points.

correspondent doublement dans les groupes projectifs $acd'b'$, $a'c'ab$; donc aa', bb', cc' sont trois couples de rayons conjugués en involution; ou :

Les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont projetés d'un point quelconque par trois couples de rayons conjugués en involution.

Ou, en d'autres termes :

Si un quadrilatère complet se déforme de manière que cinq de ses sommets parcourent cinq droites fixes, qui concourent en un même point, le sixième sommet parcourra aussi une sixième droite passant par le même point, et les six rayons formeront trois couples en involution.

En combinant le théorème qui précède (à gauche) avec le théorème du n° 100, on voit que (²) :

Si une transversale rencontre les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet en A et A′, B et B′, C et C′, les segments de la transversale sont liés par la relation suivante :

$$AB'.BC'.CA' + A'B.B'C.C'A = 0.$$

Dans le théorème de droite, désignons par U et U′, V et V′, W et W′ les sommets opposés rt et qs, st et qr, qt et rs du quadrilatère $qrst$, et par $AA'.BB'.CC'$ les points où les rayons $aa'.bb'.cc'$ sont coupés par une transversale quelconque. En vertu du n° 95, nous pourrons alors énoncer la proposition suivante :

Les six points $AA'.BB'.CC'$ *que l'on obtient en projetant d'un centre quelconque, et sur une droite quelconque, les trois couples* UU′, VV′, WW′ *de sommets opposés d'un quadrilatère complet, forment trois couples en involution.*

Supposons maintenant que le centre de projection G soit un des deux

(¹) Desargues, *loc. cit.*, p. 171.
(²) Pappus, *loc. cit.*, liv. VII, p. 130.

points communs aux deux cercles qui ont pour diamètres les diagonales UU′, VV′; les angles AGA′, BGB′ sont droits, et par suite (n° 98), l'angle CGC′ sera droit aussi; cela revient à dire que le cercle décrit sur WW′ comme diamètre passera par G. Donc :

Les trois cercles qui ont respectivement pour diamètres les trois diagonales d'un quadrilatère complet passent par les deux mêmes points.

Les trois cercles ont leurs centres en ligne droite ; donc :

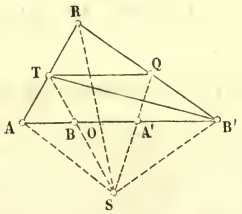
Les points milieux de trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite [1].

102. On déduit du théorème (à gauche) du n° 101 la construction du sixième point C′ d'une involution quand les cinq autres points sont donnés. Menons par C une droite quelconque sur laquelle nous prendrons deux points Q et T, et tirons AT, BT, A′Q, B′Q; la droite qui joint le point R commun à AT, B′Q au point S commun à A′Q, BT rencontrera la droite donnée au point cherché C′.

On déduit du théorème (à droite) du n° 101 la construction du sixième rayon c' d'une involution quand les cinq autres rayons sont donnés. Prenons un point quelconque sur c et faisons-y passer deux droites q, t; joignons le point ta au point qb', et le point tb au point qa'; ces deux droites concourent en un point que nous joindrons au centre du faisceau donné, et nous aurons le rayon cherché c'.

Si le point C est à l'infini dans le problème de gauche, son conjugué sera le point central de l'involution. Par conséquent, pour trouver le

Fig. 79.



point central O de l'involution dont on donne deux couples de points conjugués AA′, BB′, on construira (*fig.* 79) un quadrangle complet, de manière que deux côtés opposés passent par A, A′, deux autres côtés opposés par B, B′, et aussi de manière que le cinquième côté soit parallèle à la droite donnée; le sixième côté passera par O.

Le sixième point C′, qui forme une involution de six points avec cinq

---

[1] Chasles, *loc. cit.*, nos 344 et 345.

points donnés AA'BB'C, est complétement déterminé par ceux-ci : ou autrement, il n'y a qu'un seul point C' qui jouisse de cette propriété (n° 98). En effet, ce point peut être regardé comme déterminé par l'égalité des rapports anharmoniques (AA'BC) = (A'AB'C'); donc (n° 53), etc.

103. On peut retourner le théorème du n° 101 et dire :

Si une transversale coupe les côtés d'un triangle RSQ (*fig.* 77) *en trois points* A', B', C', *qui forment respectivement des couples en involution avec trois autres points de la même transversale* A, B, C, *les droites* RA, SB, QC *concourent en un même point* T.

En effet, soient T le point commun aux droites RA, SB et C_1 le point où la transversale coupe TQ. En vertu du théorème précédent, appliqué au quadrangle QRST, nous aurons

$$(AA'BC_1) = (A'AB'C');$$

mais, par hypothèse,

$$(AA'BC) = (A'AB'C');$$

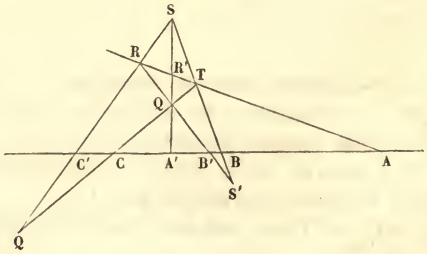
donc (n° 53) C_1 coïncide avec C, ou bien QC passe par T.

Voici le théorème corrélatif :

Si d'un point S *on projette les sommets d'un triangle rsq* (*fig.* 78) *au moyen des rayons a', b', c' qui forment respectivement des couples en involution avec trois autres rayons a, b, c, issus de* S, *les points ra, sb, qc seront sur une même droite t.*

104. Soient R', S', Q' les points où SQ, QR, RS sont res-

Fig. 80.



pectivement coupés par RT, ST, QT (*fig.* 80). Nous aurons,

sur les côtés du triangle RSQ, les groupes de quatre points

$$SQR'A', \quad QRS'B', \quad RSQ'C',$$

dont les projections, faites de T sur la transversale, sont

$$BCAA', \quad CABB', \quad ABCC'.$$

Formons le produit des rapports anharmoniques de ces derniers groupes, nous aurons

$$\left(\frac{BA}{CA}:\frac{BA'}{CA'}\right)\left(\frac{CB}{AB}:\frac{CB'}{AB'}\right)\left(\frac{AC}{BC}:\frac{AC'}{BC'}\right),$$

ou

$$-\frac{CA'.AB'.BC'}{BA'.CB'.AC'};$$

cette quantité est égale à -1, d'après le n° 100. Donc :

Si les côtés d'un triangle sont coupés par une transversale quelconque et si, d'un point aussi quelconque, on projette les sommets sur les côtés respectivement opposés, le produit des rapports anharmoniques des groupes de quatre points que l'on obtient sur les trois côtés est égal à -1.

Réciproquement, prenons trois couples de points R'A', S'B', Q'C' sur les côtés d'un triangle RSQ, de manière que le produit des rapports anharmoniques (SQR'A'), (QRS'B'), (RSQ'C') soit égal à -1; si les droites RR', SS', QQ' concourent en un point, les points A'B'C' seront en ligne droite; et, *vice versâ*, si A'B'C' sont trois points en ligne droite, les droites RR', SS', QQ' auront un point commun.

Supposons que la transversale passe à l'infini, les rapports anharmoniques (SQR'A'), (QRS'B'), (RSQ'C') deviennent respectivement égaux à (n° 53) SR' : QR', QS' : RS', RQ' : SQ'. Donc [1] :

Si trois droites issues d'un même point T *et passant respectivement par les sommets d'un triangle* RSQ *rencontrent les côtés opposés en* R', S', Q', *on a, entre les segments des côtés,*

---

[1] Théorème de Ceva, *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Mediolani, 1678), t. I, p. 2. — Cfr. Baltzer, *Trigon.*, p. 131.

la relation

$$\frac{SR'}{QR'}\cdot\frac{QS'}{RS'}\cdot\frac{RQ'}{SQ'}=-1;$$

et, réciproquement, *si l'on prend les points* R', S', Q' *sur les côtés d'un triangle* RSQ, *de manière que l'on ait la relation précédente, les droites* RR', SS', QQ' *concourent en un point* T.

En répétant ce théorème pour deux points T', T'', on obtient cet autre théorème :

Si les sommets R, S, Q *d'un triangle sont projetés, à partir de deux centres* T', T'', *sur les côtés opposés, respectivement, en* R'S'Q', R''S''Q'', *le produit des rapports anharmoniques* (SQR'R''), (QRS'S''), (RSQ'Q'') *est égal à* + 1.

Supposons encore la transversale entièrement arbitraire et menons ST, QT respectivement parallèles à QR, RS; alors les points S', Q' passent à l'infini et R' devient le point milieu de SQ (comme point d'intersection des diagonales QS, RT du parallélogramme QRST). Par suite, les rapports anharmoniques (SQR'A'), (QRS'B'), (RSQ'C') seront respectivement égaux à — (QA' : SA'), RB' : QB', SC' : RC'. Donc [1] :

Si une transversale coupe les côtés d'un triangle RSQ *en* A', B', C', *on aura, entre les segments des côtés, la relation*

$$\frac{QA'}{SA'}\cdot\frac{RB'}{QB'}\cdot\frac{SC'}{RC'}=1;$$

et, réciproquement, *si l'on prend trois points* A'B'C' *sur les côtés d'un triangle* RSQ, *de manière que la relation ci-dessus soit satisfaite, ces trois points seront en ligne droite.*

En répétant ce théorème pour deux transversales, on trouve que :

Si deux transversales coupent les côtés d'un triangle RSQ *respectivement en* A'B'C', A''B''C'', *le produit des rapports anharmoniques* (SQA'A''), (QRB'B''), (RSC'C'') *est égal à* + 1.

Réciproquement, prenons trois couples de points A'A'', B'B'', C'C'' sur les côtés d'un triangle RSQ, de manière que le

---

[1] Théorème de Ménélaus, *Sphærica*, t. III, p. 1. — Cfr. Baltzer, *Trigon.*, p. 134.

produit des rapports anharmoniques (SQA′A″), (QRB′B″), (RSC′C″) soit égal à $+1$; si les points A′B′C′ sont en ligne droite, les points A″B″C″ seront aussi en ligne droite; et si les droites RA′, SB′, QC′ concourent en un point, les droites RA″, SB″, QC″ seront aussi concourantes.

105. Nous avons vu, que quand on a deux ponctuelles projectives (ABC...), (A′B′C′...) dans un même plan, si l'on projette du point commun à deux des droites analogues AB′ et A′B, AC′ et A′C,..., BC′ et B′C,... les deux ponctuelles données, les rayons projetants forment une involution. Les théorèmes corrélatifs sont les suivants :

Étant donnés deux faisceaux projectifs de rayons (abc...), ($a'b'c'$...) situés dans un même plan, mais non concentriques, si on les coupe par une droite joignant deux des points analogues ab' et $a'b$, ac' et $a'c$,..., bc' et $b'c$,..., on obtient des couples de points en involution.

Étant donnés deux faisceaux projectifs de plans ($\alpha\beta\gamma$...), ($\alpha'\beta'\gamma'$...) dont les axes se rencontrent, si l'on fait une section par le plan déterminé par deux droites analogues à $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$, $\alpha\gamma'$ et $\alpha'\gamma$,..., $\beta\gamma'$ et $\beta'\gamma$,..., on obtient des couples de rayons en involution.

Étant donnés deux faisceaux projectifs de rayons (abc...), ($a'b'c'$...) ayant le même centre mais non situés dans un même plan, si on les projette d'un point commun à deux des plans ab' et $a'b$, ac et $a'c$,..., bc et $b'c$,..., les plans projetants forment une involution.

106. *Cas particuliers.* — Tous les couples de points d'une droite, équidistants d'un point fixe de cette droite, forment une involution, parce que chaque couple est divisé harmoniquement par le point fixe et le point à l'infini.

Réciproquement, si le point à l'infini est un des éléments doubles d'une involution de points, tout couple de points conjugués a son milieu sur l'autre point double. Si, dans une involution, deux couples AA′, BB′ de points conjugués ont le même point milieu, ce point sera aussi au milieu d'un autre couple quelconque CC′.

Tous les angles rectilignes qui ont même sommet sont situés dans un même plan et ont pour bissectrice une même droite fixe, formant une involution, parce que les côtés de chaque angle sont séparés harmoniquement par la bissectrice commune et par le rayon qui lui est perpendiculaire.

Réciproquement, si les éléments doubles d'une involution de rayons sont deux droites perpendiculaires entre elles, les rayons conjugués de chaque couple font des angles égaux avec chacun des rayons doubles. Si, dans une involution, les angles de deux couples aa', bb' de rayons con-

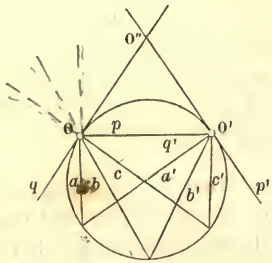
jugués ont les bissectrices communes, celles-ci seront aussi les bissectrices d'un autre couple quelconque cc'.

Tous les angles dièdres, ayant même arête et même plan bissecteur, forment une involution, car les faces de chaque dièdre sont séparées harmoniquement par le plan fixe et le plan qui lui est perpendiculaire et qui passe par l'arête commune. Réciproquement, si les éléments doubles d'une involution de plans sont deux plans perpendiculaires entre eux, les plans conjugués de chaque couple font des angles égaux avec chacun des plans doubles, etc.

§ XIII. — Formes projectives dans le cercle.

107. Soient donnés dans un plan deux faisceaux (directement) égaux de rayons $abcd\ldots$, $a'b'c'd'\ldots$, dont les centres sont O, O′ (*fig.* 81). L'angle de deux rayons correspondants

Fig. 81.



aa', bb', cc',... est constant (n° 80) : donc le lieu géométrique du point commun à deux rayons correspondants sera un cercle passant par O, O′ [1]. La tangente au cercle en O fait avec la corde OO′ un angle égal à chacun des angles OAO′, OBO′, OCO′,...; mais le rayon OO′ du second faisceau doit faire le même angle avec le rayon correspondant du premier faisceau; donc la tangente en O est précisément ce rayon q du premier faisceau, dont le correspondant q' du second faisceau est la corde OO′.

Imaginons que la circonférence soit parcourue par le point

---

[1] Baltzer, *Planim.*, p. 45.

mobile A, les rayons mobiles AO, AO′, ou a, a', engendrent les deux faisceaux; quand A sera très-voisin de O, le rayon AO′ différera très-peu, en position, de OO′ ou de q', et le rayon AO différera très-peu de q, c'est-à-dire de la tangente en O. Cela concorde avec la définition de la tangente en O : la droite qui joint O au point infiniment voisin de la circonférence.

De même, au rayon OO′ ou p du premier faisceau correspondra dans le second le rayon p', tangent au cercle en O′.

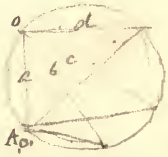
108. Réciproquement, si l'on projette de deux points O, O′ d'un cercle autant de points que l'on veut A, B, C, D,... du même cercle, les rayons projetants O(A, B, C, D,...), O′(A, B, C, D,...) forment deux faisceaux (directement) égaux, parce que les angles AOB et AO′B, AOC et AO′C,... BOC et BO′C,... sont égaux; ces faisceaux sont donc projectifs (n° 78). En d'autres termes, si les points A, B, C,... restent fixes, tandis que le centre du faisceau se meut sur la circonférence, le faisceau reste toujours égal et, par suite, projectif à lui-même.

Le rayon qui de O projette le même point O ou, plus exactement, le point du cercle infiniment voisin de O est la tangente en O. D'où il résulte que, dans les faisceaux projectifs O(A, B, C,...), O′(A, B, C,...), le rayon du premier faisceau qui correspond au rayon O′O du second est la tangente en O.

109. Nous savons que, dans deux formes projectives, quatre éléments harmoniques (n° 58) correspondent à quatre éléments harmoniques; il suit de là que, si quatre rayons O(A, B, C, D) sont harmoniques, le groupe O′(A, B, C, D) sera aussi harmonique, quelle que soit la position du point O′ sur le cercle. Si nous faisons coïncider O′ avec le point infiniment voisin de A, le groupe formé par la tangente en A et les cordes AB, AC, AD sera aussi harmonique. De même, le faisceau composé de la corde AB, de la tangente en B et des cordes BC, BD sera aussi harmonique, etc.

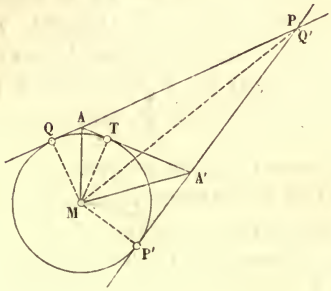
On dira, dans ce cas, que les quatre points ABCD du cercle sont *harmoniques* (¹).

(¹) Steiner, *loc. cit.*, p. 157.



110. Si PQ, P′Q′ sont deux tangentes fixes d'un cercle de centre M (*fig.* 82) et AA′ une tangente variable limitée aux

Fig. 82.



deux tangentes fixes, l'angle AMA′ est constant. En effet, soient Q, P′, T les points de contact, on a

$$\text{angle AMA}' = \text{AMT} + \text{TMA}' = \tfrac{1}{2}\text{QMT} + \tfrac{1}{2}\text{TMP}' = \tfrac{1}{2}\text{QMP}' \quad (^1).$$

Quand la droite AA′ se meut entre les deux tangentes fixes, les rayons MA, MA′ engendrent donc deux faisceaux projectifs (n° 82); par suite, les points A, A′ décrivent deux ponctuelles projectives. Donc :

Les tangentes au cercle marquent sur deux tangentes fixes deux ponctuelles projectives (²).

Comme l'angle AMA′ est égal à $\frac{1}{2}$QMP′, c'est-à-dire à chacun des angles QMQ′, PMP′ (où P, Q′ indiquent un même point considéré comme appartenant à la première ou à la seconde tangente fixe), les points Q et Q′, P et P′ sont correspondants dans les deux ponctuelles projectives; ce qui revient à dire que les points de contact des deux tangentes fixes correspondent au point commun à ces tangentes.

Imaginons que le cercle soit parcouru (enveloppé) par la tangente mobile, les points A, A′ engendrent les deux ponctuelles projectives; quand la tangente mobile a une position très-voisine de celle de PQ, le point A′ est très-voisin de Q′, et le

(¹) Baltzer, *Planim.*, p. 6 et 13.
(²) Baltzer, *Trigon.*, p. 155.

point A devient très-voisin du point correspondant à Q′, c'est-à-dire du point de contact de PQ. Donc :

Il faut considérer le point de contact d'une tangente comme l'intersection de celle-ci avec une tangente infiniment voisine.

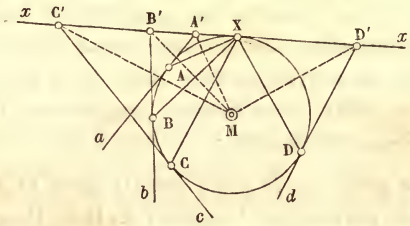
111. Le théorème précédent exprime que quatre tangentes *abcd* d'un cercle sont coupées par une cinquième tangente en quatre points ABCD, dont le rapport anharmonique est constant, quelle que soit cette cinquième tangente.

La cinquième tangente peut être infiniment voisine à une des quatre tangentes fixes, à *a* par exemple; alors A est le point de contact de *a*, et B, C, D sont les intersections *ab*, *ac*, *ad*.

Comme cas particulier, si *abcd* coupent PQ en quatre points harmoniques, les intersections de *abcd* avec une tangente quelconque au cercle formeront aussi un groupe harmonique. Le groupe formé par le point de contact de *a* et par les points d'intersection *ab*, *ac*, *ad*,... est donc un groupe harmonique. Dans ce cas, les quatre tangentes *abcd* sont dites *harmoniques* (¹).

112. Soient (*fig.* 83) A, B, C,..., X des points du cercle et *a*, *b*, *c*,..., *x* les tangentes correspondantes. Si l'on projette

Fig. 83.



du centre du cercle les points A′, B′, C′,..., où *x* est coupée par *a*, *b*, *c*,..., les rayons projetants sont respectivement

(¹) Steiner, *loc. cit.*, p. 157.

perpendiculaires aux cordes XA, XB, XC,... et forment, par suite (n° 82), un faisceau égal au faisceau X(A, B, C,...). Donc la ponctuelle A′B′C′... est projective au faisceau X(ABC...) [1], ou bien :

La ponctuelle que plusieurs tangentes données d'un cercle déterminent sur une tangente arbitraire est projective au faisceau des rayons qui projettent leurs points de contact d'un point quelconque du même cercle.

Il résulte de là, comme cas particulier, que si X(ABCD) est un groupe harmonique, le groupe A′B′C′D′ est aussi harmonique, ou :

Si quatre points d'un cercle sont harmoniques, les tangentes en ces points sont aussi harmoniques, et réciproquement.

§ XIV. — Formes projectives dans les coniques.

113. Proposons-nous de construire les figures homologiques de celles qui expriment les théorèmes des n°s 108, 110, 112. Aux points et aux tangentes du cercle correspondront les points et les tangentes d'une conique (n° 18). Donc, pour une conique, la tangente est la droite qui coupe la courbe en deux points infiniment voisins ; un point de la courbe est l'intersection de deux tangentes infiniment voisines; à deux faisceaux égaux et, par suite, projectifs correspondront deux faisceaux projectifs, et à deux ponctuelles projectives correspondront aussi deux ponctuelles projectives; deux faisceaux ou deux ponctuelles qui se correspondent dans deux figures homologiques sont, en effet, deux formes projectives. Donc on conclut des théorèmes ci-dessus :

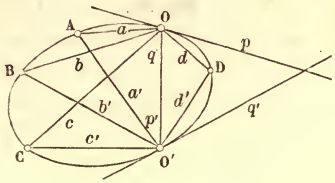
I. — *Si l'on projette de deux points fixes* O, O′ *d'une conique autant de points que l'on veut* A, B, C, D,... *de la même courbe* (*fig.* 84), *les rayons projetants* O(A, B, C, D,...), O′(A, B, C, D,...) *forment deux faisceaux projectifs. Au rayon* OO′ *du premier faisceau correspond la tangente en* O′,

---

[1] Baltzer, *Trigon.*, p. 157.

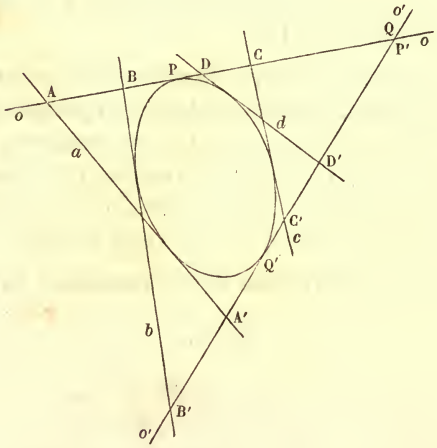
et au rayon O′O *du second faisceau correspond la tangente en* O.

Fig. 84.



II. — *Deux tangentes fixes o, o′ d'une conique sont coupées par autant de tangentes que l'on veut a, b, c, d,... en des*

Fig. 85.



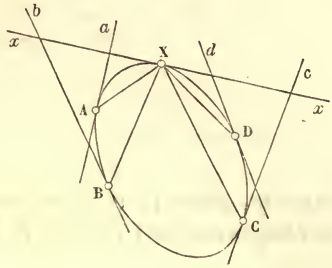
points formant des ponctuelles projectives. Au point oo′ de la première ponctuelle correspond le point de contact de o′, et au point o′o de la seconde ponctuelle correspond le point de contact de o (¹).

III. — *La ponctuelle qu'une tangente mobile à une conique (fig. 86) détermine sur une tangente fixe est projective au*

(¹) Steiner, *loc. cit.*, p. 139.

faisceau qui projette le point variable de contact à partir d'un point fixé arbitrairement sur la même conique.

Fig. 86.

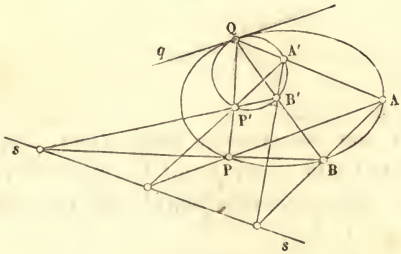


114. Nous allons maintenant démontrer les théorèmes inverses des théorèmes I, II.

I'. *Si deux faisceaux de rayons, tracés dans un même plan (non concentriques), sont projectifs (non perspectifs), le lieu du point commun à deux rayons correspondants est une conique qui passe par les centres des deux faisceaux ; les tangentes en ces points sont les rayons des deux faisceaux qui correspondent à la droite qui joint leurs centres.*

Soient P, Q les centres des deux faisceaux (*fig.* 87), PA et

Fig. 87.



QA, PB et QB,... les couples de rayons correspondants. Le lieu des points A, B,... passe par le point Q, parce que le rayon PQ du faisceau P et le rayon correspondant du faisceau Q se coupent en Q. De même P est un point du lieu.

Ne pourrait-on pas concevoir deux plans P's et P's
e fig. A B... P serait le proj. de A'B'P' d'un point Q

Soit q le rayon du faisceau Q qui correspond au rayon PQ du faisceau P, et décrivons un cercle tangent à q en Q : ce cercle coupe les rayons QA, QB,..., QP en A′, B′,..., P′. Les faisceaux Q(A′, B′, C′,...), P′(A′, B′, C′,...) sont projectifs (108); par suite, les faisceaux P (A, B, C,...), P′ (A′, B′, C′,...) sont aussi projectifs; ces derniers sont aussi perspectifs, puisque le rayon PP′Q se correspond à lui-même. Donc les droites PA et P′A′, PB et P′B′, PC et P′C′,... se coupent en des points d'une droite fixe s. Les triangles PAB et P′A′B′, PAC et P′A′C′,... sont homologiques; en effet, les droites PP′, AA′, BB′, CC′,... concourent toutes en Q; donc (n° 14) les couples de côtés PA et P′A′, PB et P′B′, PC et P′C′,..., AB et A′B′, AC et A′C′,... se couperont en des points de s. Il s'ensuit (n° ~~66~~) 16 que le cercle et le lieu des points A, B, C,..., P, Q sont des courbes homologiques; Q est le centre et s l'axe d'homologie. Donc (n° 18) le lieu cherché est une conique.

Dans les deux figures homologiques, le point Q et la droite q se correspondent à eux-mêmes (n° 18); donc la tangente en Q à la conique est la droite q elle-même.

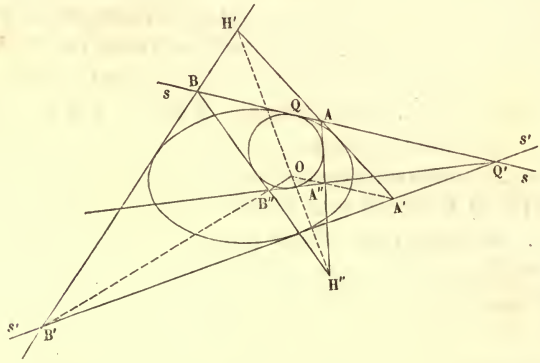
II′. *Si deux droites ponctuelles, situées dans un même plan (non superposées) sont projectives (non perspectives), les droites qui joignent les couples de points correspondants enveloppent une conique, c'est-à-dire sont les tangentes d'une conique. Cette conique est tangente aux deux droites données aux points qui correspondent à leur commune intersection.*

Soient s, s' (*fig.* 88) deux ponctuelles projectives, A et A′, B et B′,... des couples de points correspondants. La courbe enveloppe des droites AA′, BB′,... a aussi pour tangente la droite s, parce qu'elle joint le point ss' ou Q′ de la seconde ponctuelle au point correspondant Q de la première. De même s' est une autre tangente.

Décrivons un cercle tangent à s en Q et menons-lui les tangentes AA″, BB″,... de différents points de s : elles coupent en A″, B″,... la tangente issue de Q′. De même AA′ coupe BB′, CC′,... en H′, K′,..., et AA″ coupe BB″, CC″,... en H″, K″,.... Les ponctuelles ABC..., A″B″C″... sont projectives (n° 110); donc les ponctuelles A′B′C′..., A″B″C″... sont aussi

projectives; ces dernières ponctuelles sont aussi perspectives puisque le point Q′ se correspond à lui-même. Donc les droites A′A″, B′B″, C′C″,... concourent en un point fixe O. Les

Fig. 88.



triangles A′B′H′ et A″B″H″ et A′C′K′ et A″C″K″,... sont homologiques, puisque les couples de côtés A′B′ et A″B″, A′H′ et A″H″, B′H′ et B″H″,... se coupent aux points Q′, A, B, C,... de la droite fixe s; donc (n° 15) les droites A′A″, B′B″, C′C″,..., H′H″, K′K″,..., qui joignent les sommets, concourent au point fixe O. Il résulte de là que la figure formée par les droites AA′, BB′, CC′,... et la figure formée par les droites AA″, BB″, CC″,..., c'est-à-dire par les tangentes au cercle, sont homologiques (n° 16); s est l'axe et O le centre d'homologie; donc l'enveloppe cherchée est une courbe homologique à un cercle, ce qui veut dire une conique (n° 18).

Dans les deux figures homologiques, la droite s et le point Q se correspondent à eux-mêmes (n° 18), donc le point de contact de la conique avec s est Q [1].

Les théorèmes I′, II′ de ce numéro sont corrélatifs (27), car la figure formée par les points d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs a pour figure corrélative celle qui est formée par les droites qui joignent les

---

[1] Chasles, *Traité des sections coniques* (Paris, 1865), nos 8 et 9.

points correspondants de deux ponctuelles projectives. Donc, *dans deux figures corrélatives (suivant la loi de dualité dans le plan), aux points d'une conique correspondent les tangentes d'une autre conique.*

115. En ayant égard aux n^os^ **58** et **61**, les théorèmes des n^os^ **113** et **114** peuvent aussi s'énoncer comme il suit :

Le rapport anharmonique des quatre droites qui joignent quatre points fixes d'une conique à un point variable de cette courbe est constant.

Le rapport anharmonique des quatre points où quatre tangentes fixes d'une conique sont coupées par une tangente variable de la même courbe est constant (1).

On nomme *rapport anharmonique de quatre points donnés* ABCD d'une conique le rapport anharmonique des quatre droites O(A, B, C, D), où O est un point quelconque de la conique. On nomme *rapport anharmonique de quatre tangentes données abcd* d'une conique le rapport anharmonique des quatre points $o(a, b, c, d)$, où o est une tangente quelconque de la conique.

Le rapport anharmonique de quatre tangentes d'une conique est égal au rapport anharmonique de leurs points de contact (2).

Le lieu d'un point d'où l'on peut projeter quatre points donnés ABCD *par des rayons, dont le rapport anharmonique soit donné, est une conique qui passe par les points donnés.*

La tangente en un de ces points, en A par exemple, est une droite qui forme, avec AB, AC, AD, un groupe, dont le rapport anharmonique est égal à celui qui est donné.

La courbe enveloppe des droites qui sont coupées par quatre droites données en quatre points, dont le rapport anharmonique soit donné, est une conique tangente aux droites données. Le point de contact d'une de ces droites, de a par exemple, forme avec les points ab, ac, ad un groupe dont le rapport anharmonique a la valeur donnée (3).

---

(1) STEINER, *loc. cit.*, p. 156.
(2) CHASLES, *Géom. sup.*, n° 663.
(3) STEINER, *loc. cit.*, p. 156-157.

116. Par cinq points O, O′, A, B, C donnés arbitrairement dans un plan (*fig.* 84); mais dont trois quelconques ne sont pas en ligne droite, on peut faire passer une conique. En effet, il suffira de construire les faisceaux projectifs, dont les centres sont deux des points donnés, OO′ par exemple, et dont trois couples de rayons correspondants OA et O′A, OB et O′B, OC et O′C se coupent aux trois autres points. Tout autre couple OD, O′D de rayons correspondants donnera un nouveau point D de la courbe.

Pour construire la tangente en un des points donnés, en O par exemple, il suffira de déterminer le rayon du faisceau O qui correspond au rayon O′O du faisceau O′.

Il ne passe qu'une seule conique par cinq points donnés; s'il en passait deux, elles auraient en commun une infinité d'autres points (déterminés par les couples de rayons correspondants des faisceaux projectifs), ce qui est absurde.

On peut construire une conique tangente à cinq droites données dans un plan (*fig.* 85), pourvu que trois d'entre elles ne passent pas par un même point. En effet, il suffira de construire les ponctuelles projectives au moyen des trois couples de points correspondants (oa et $o'a$, ob et $o'b$, oc et $o'c$) que trois des droites données a, b, c déterminent sur les deux autres. La droite d qui joindra deux autres points correspondants sera une nouvelle tangente de la courbe.

Pour construire le point de contact d'une des droites données, de o par exemple, il suffira de déterminer le point de la ponctuelle o qui correspond au point oo' de la ponctuelle o'.

Il n'y a qu'une seule conique tangente à cinq droites données; s'il y en avait deux, elles auraient une infinité de tangentes communes (les droites déterminées par les couples de points correspondants des ponctuelles projectives), ce qui est absurde.

Il résulte de là, en outre, que :

Par quatre points, il passe une infinité de coniques; deux quelconques d'entre elles n'ont aucun point commun en dehors des quatre points donnés.

Il y a une infinité de coniques tangentes à quatre droites données; deux quelconques de ces coniques ne peuvent avoir une autre tangente commune.

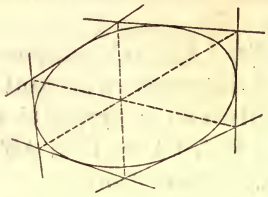
117. On peut maintenant énoncer de la manière suivante les théorèmes du n° 70 :

Si un hexagone est circonscrit à une conique (*fig.* 89 et 56), les droites qui joignent les trois cou-

Si un hexagone est inscrit dans une conique (*fig.* 57 et 90), les trois couples de côtés opposés se cou-

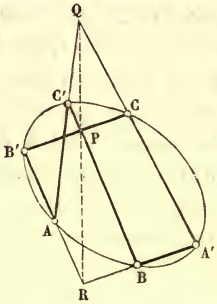
ples de sommets opposés concourent en un même point [1].

Fig. 89.



pent en trois points situés en ligne droite [2].

Fig. 90.



Le théorème de Pascal est relatif à six points et celui de Brianchon à six tangentes d'une conique; ces six points ou tangentes peuvent être pris arbitrairement parmi tous les points et toutes les tangentes de la courbe. Or la conique est déterminée par cinq points ou cinq tangentes, ce qui revient à dire que cinq points ou cinq tangentes peuvent être pris arbitrairement parmi les points ou les droites du plan; mais, une fois ces cinq éléments déterminés, la conique l'est aussi. Ainsi le théorème de Pascal exprime la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire six points d'un plan pour qu'ils puissent se trouver sur une conique; le théorème de Brianchon exprime, de même, la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire six droites d'un plan, pour qu'elles puissent être tangentes à une conique.

Il résulte des énoncés mêmes du n° 117 que la condition est nécessaire; six points d'une conique, pris dans un ordre

---

(1) Théorème de Brianchon, publié pour la première fois en 1806 et reproduit plus tard dans le *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris, 1817, p. 34).

(2) Théorème de Pascal : *Essai sur les coniques*, opuscule de six pages in-8, publié pour la première fois en 1640, quand l'auteur n'avait encore que seize ans, puis reproduit dans l'édition des *Œuvres de* Pascal (La Haye, 1779) et aussi récemment par M. Weissenborn, dans la préface de son livre : *Die Projection in der Ebene* (Berlin, 1862).

quelconque, peuvent être considérés comme les sommets d'un hexagone inscrit; et, comme le théorème de Pascal est vrai pour tout hexagone inscrit, il est nécessaire que, dans quelque ordre que l'on prenne les six points pour former l'hexagone, les couples de côtés opposés concourent en trois points en ligne droite.

La condition est suffisante. En effet (*fig.* 90), supposons que l'hexagone AB′CA′BC′, que nous obtenons en prenant les six points dans un certain ordre, jouisse de la propriété que les couples de côtés opposés BC′ et B′C, CA′ et C′A, AB′ et A′B concourent en trois points P, Q, R d'une droite.

Par les points AB′CA′B passe une conique (et une seule) qui rencontre la droite AC′ en un certain point X. Alors AB′CA′BX sera un hexagone inscrit et les couples de côtés opposés B′C et BX, XA ou C′A et CA′, A′B et AB′ se couperont en trois points en ligne droite, dont le deuxième et le troisième sont Q et R; le premier est donc l'intersection de QR et de B′C ou P. La droite BX passe donc aussi bien par P que la droite BC′; donc les droites indéfinies BX et BC′ coïncident. Il résulte de là que le point X est situé sur AC′ et sur BC′; ce point est donc précisément le point C′. (C. Q. F. D.)

Suivant l'ordre dans lequel on relie six points, on peut obtenir soixante hexagones simples. Il résulte du raisonnement que nous venons de faire que, si un quelconque de ces hexagones jouit de la propriété que ses couples de côtés opposés se coupent en trois points en ligne droite, les six points appartiennent à une même conique et, par suite, tous les autres hexagones jouissent de la même propriété [1].

Des considérations corrélatives à celles qui précèdent et se rapportant au théorème de Brianchon peuvent être développées pour un système de six droites.

118. Considérons les deux triangles, dont l'un est formé par le premier, le troisième et le cinquième côté, l'autre par le deuxième, le quatrième et le sixième côté de l'hexagone inscrit AB′CA′BC′ (*fig.* 90). Prenons comme correspondants

---

[1] Steiner, *loc. cit.*, p. 311.

les côtés BC′ et B′C, CA′ et C′A, AB′ et A′B; d'après le théorème de Pascal, ces côtés se coupent deux à deux en trois points situés en ligne droite; donc (n° 15) ces deux triangles sont homologiques. Il résulte de là que l'on peut énoncer le théorème de Pascal comme il suit :

Si deux triangles sont homologiques, les points où les côtés de l'un rencontrent les côtés non correspondants de l'autre sont situés sur une même conique.

De même, si nous considérons dans un hexagone circonscrit $ab'ca'bc'$ (*fig.* 89) les sommets de rang impair et les sommets de rang pair, comme les sommets de deux triangles où les sommets bc' et $b'c$, ca' et $c'a$, ab' et $a'b$ sont pris comme correspondants, ces couples de sommets sont alignés sur un même point, d'après le théorème de Brianchon; donc (n° 14) les deux triangles sont homologiques et le théorème de Brianchon peut être énoncé ainsi :

Si deux triangles sont homologiques, les droites qui joignent les sommets de l'un aux sommets non correspondants de l'autre sont tangentes à une même conique.

On peut réunir les deux énoncés en un seul :

Si deux triangles sont homologiques, les points où les côtés de l'un coupent les côtés non correspondants de l'autre sont sur une conique, et les droites qui joignent les sommets de l'un aux sommets non correspondants de l'autre sont tangentes à une autre conique [1].

119. Reportons-nous à la *fig.* 90 et considérons les points AB′CA′B comme fixes et C′ comme variable; on peut présenter ainsi le théorème de Pascal :

Si un triangle C′PQ *se déforme, de manière que ses côtés* PQ, PC′, QC′ *tournent autour des points fixes* R, B, A *pendant que deux de ses sommets* P, Q *parcourent deux droites fixes* CB′, CA′, *le troisième sommet* C′ *décrit une conique qui passe par les points donnés* A, B, *par le point* C *commun aux droites*

---

[1] Möbius, *loc. cit.*, n° 278.

données, par le point B′ *commun à* AR, CB′ *et par le point* A′ *commun à* BR, CA′ (¹).

De même, on peut présenter le théorème de Brianchon comme il suit :

Si un triangle $c'pq$ (*fig.* 95) se déforme, de manière que ses sommets pq, pc', qc' parcourent les droites fixes r, b, a pendant que deux de ses côtés tournent autour de points fixes cb', ca', le troisième côté c' enveloppe une conique tangente aux droites données a, b, à la droite c qui joint les points fixes, à la droite b' qui joint les points ar, cb' et à la droite a' qui joint br à ca'.

120. Si, dans les propositions du n° **116**, à droite, nous supposons qu'une tangente soit la droite à l'infini, la conique sera une parabole (n° **18**) ; donc :

Une parabole est déterminée par quatre tangentes ; ou bien (n° **116**, à droite) :

Il n'existe qu'une seule parabole tangente à quatre droites données.

En faisant la même hypothèse dans le théorème n° **113**, II, les points à l'infini des deux tangentes, ponctuelles projectives, sont des points correspondants, car la droite qui les joint est une tangente à la courbe. Donc (n° **74**) :

Les tangentes à une parabole coupent deux tangentes fixes de cette courbe en des points qui forment deux ponctuelles semblables ; ou :

Deux tangentes fixes d'une parabole sont divisées par toutes les autres tangentes en parties proportionnelles (²).

Les deux tangentes fixes sont coupées par les autres aux points A et A′, B et B′, C et C′,... (*fig.* 91) ; soient P, Q′ leurs

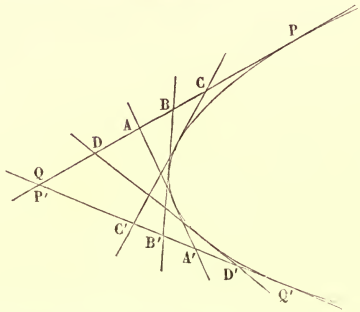
---

(¹) Ce théorème a été donné par Maclaurin, en 1721. Cfr. les *Transactions philosophiques de la Société royale de Londres* pour l'année 1735 (page 121 de la traduction française publiée à Bologne en 1741), et Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* (Bruxelles, 1837). Si le point B est à l'infini, ce théorème devient le lemme 20 de Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, liv. I, p. 198 de l'édition de Cologne ; la première édition est de 1686.

(²) Apollonii Pergæi *Conicorum* liv. III, 41.

points de contact, leur point commun devra être désigné par Q ou P′, suivant qu'on le considère comme point de l'une

Fig. 91.



ou de l'autre tangente. Nous aurons donc les égalités

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \ldots = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = \frac{AP}{A'P'} = \frac{AQ}{A'Q'} = \ldots = \frac{PQ}{P'Q'}.$$

Réciproquement (n° **114**), *si l'on donne (dans un plan) deux droites ponctuelles semblables, toutes les droites qui joignent des couples de points correspondants sont tangentes à une même parabole, qui touche les droites données aux points qui correspondent à leur commune intersection.*

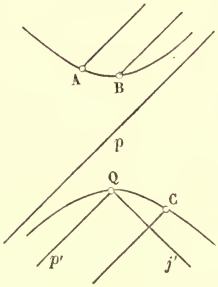
En effet, la droite à l'infini est, dans ce cas, une tangente à la conique, car elle joint les points à l'infini des deux droites données, et ces points sont correspondants (n° 73).

121. Supposons, dans le théorème n° **114**, que le point P soit à l'infini ou, ce qui revient au même, que le premier faisceau soit formé de droites parallèles. A la droite QP (c'est-à-dire au rayon du second faisceau parallèle aux rayons du premier), considérée comme rayon p' du second faisceau, correspond la droite p du premier, tangente en P; cette droite peut être à distance finie ou à distance infinie.

Dans le premier cas (*fig.* 92), la droite à l'infini est un rayon j du premier faisceau, auquel correspondra dans le second un rayon j' différent de p' et, par suite, ne passant pas par P; donc la conique sera une hyperbole (n° 18), dont les points

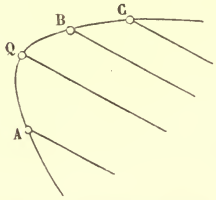
à l'infini sont $P \equiv pp'$ et jj'; la droite p est une des asymptotes et j' est parallèle à l'autre.

Fig. 92.



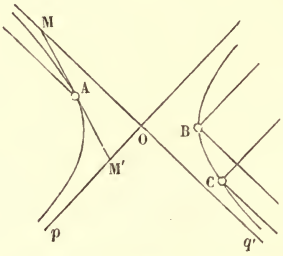
Dans le second cas (*fig.* 93), la droite à l'infini est tangente en P à la conique : celle-ci est donc une parabole.

Fig. 93.



122. Si, dans le même théorème du n° **114**, on suppose les deux points P et Q à distance infinie (*fig.* 94), chacun des

Fig. 94.



deux faisceaux projectifs sera formé de rayons parallèles et la

conique qu'ils engendrent, devant passer par les points P, Q, sera une hyperbole (n° 18). Les asymptotes de l'hyperbole sont les tangentes en ses points à l'infini [1]; par suite, elles seront les rayons p, q' du premier et du second faisceau, qui correspondent à la droite à l'infini, considérée successivement comme rayon du second ou du premier faisceau.

D'après le théorème général du n° 113, les asymptotes de l'hyperbole sont coupées par toutes les autres tangentes en des points formant deux ponctuelles projectives, dans lesquelles les points de contact, qui sont ici à l'infini, correspondent au point O où se coupent les asymptotes. Donc l'équation

$$JM.I'M' = \text{const.}$$

des n°s 59 et 83 devient, dans ce cas,

$$OM.OM' = \text{const.},$$

où M, M′ sont les intersections d'une tangente quelconque avec les asymptotes. Nous concluons, par conséquent, que :

Le produit des segments déterminés par une tangente quelconque de l'hyperbole sur les deux asymptotes, segments comptés à partir de l'intersection des asymptotes, a une valeur constante.

On peut dire aussi :

L'aire du triangle formé par une tangente quelconque de l'hyperbole et ses asymptotes est constante [2].

123. Appliquons aussi le théorème du n° 113 au cas de deux tangentes fixes *parallèles*, coupées en M, M′ par une tangente variable. Dans les ponctuelles projectives engendrées par ces points, au point à l'infini commun aux deux tangentes fixes correspondent leurs points de contact; en les désignant par J, I′, nous aurons, en vertu du n° 59, l'égalité

$$JM.I'M' = \text{const.}$$

---

[1] Desargues, *loc. cit.*, p. 210; — Newton, *loc. cit.*, scolie de la prop. p. 27.
[2] Apollonius, *loc. cit.*, III, 43.

Donc :

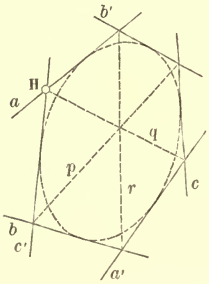
Le produit des segments qu'une tangente variable détermine sur deux tangentes parallèles fixes, à partir de leurs points de contact, est constant (¹).

§ XV. — Constructions et exercices.

124. On résout les problèmes suivants au moyen des théorèmes corrélatifs du n° **117** :

Cinq tangentes a, b', c, a', b à une conique étant données, construire la tangente à la courbe que l'on peut mener par un point H d'une des tangentes données a (*fig.* 95).

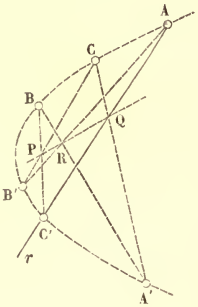
Fig. 95.



Soit c' la tangente cherchée, l'hexagone $ab'ca'bc'$ jouira de la propriété exprimée par le théorème de Brianchon. Menons la diagonale r qui joint deux sommets opposés ab' et $a'b$, et la diagonale q qui joint les deux sommets opposés ca' et $c'a$ (ou $c'a$ est le point donné H). La diagonale qui joint les deux autres sommets opposés bc', $b'c$ devra aussi passer par le point qr.

Cinq points A, B', C, A', B d'une conique étant donnés, trouver le point commun à cette courbe et à une droite passant par un des points donnés A (*fig.* 96).

Fig. 96.



Soit C' le point cherché, l'hexagone AB'CA'BC' jouira de la propriété exprimée par le théorème de Pascal. Soient R le point commun à AB', A'B (deux côtés opposés de l'hexagone); Q le point commun à CA', r (deux autres côtés opposés); la droite QR devra couper, en un même point P, les deux autres côtés opposés B'C et BC'. Donc, si l'on joint le point P, commun à B'C,

(¹) Apollonius, *loc. cit.*, III, 42.

Donc, si p joint les points qr et $b'c$, le point pb, joint au point donné, donnera la droite cherchée.

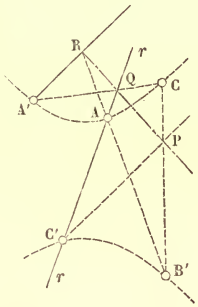
Si l'on suppose maintenant que le point H prenne d'autres positions sur une des tangentes connues, et si l'on répète chaque fois la construction qui précède, on obtiendra autant de tangentes que l'on voudra de la conique. Donc le théorème de Brianchon sert à construire par tangentes la conique déterminée par cinq tangentes données [1].

QR, au point B, BP coupera r au point cherché C'.

Si l'on suppose maintenant que la droite donnée prenne d'autres positions en tournant autour d'un des points donnés de la conique, et si l'on répète chaque fois la construction qui précède, on obtiendra autant de points que l'on voudra de la conique. Donc le théorème de Pascal sert à construire par points la conique déterminée par cinq points donnés [2].

125. Supposons que, dans le problème qui précède à droite le point B soit à distance infinie. La conique sera alors, en général, une hyperbole, dont on connaît les points A, B', C, A' et la direction d'une asymptote. On demande la seconde intersection de la courbe avec une droite donnée r passant par A (*fig.* 97).

Fig. 97.



La solution se déduit de celle du problème précédent, en portant le point B à l'infini dans la direction donnée. Il faudra joindre le point R, commun à AB' et à la droite menée par A' dans la direction donnée, avec le point Q commun à r, A'C ; puis tirer par le point P commun à QR et B'C une droite parallèle à A'R, qui coupera r au point cherché C'.

---

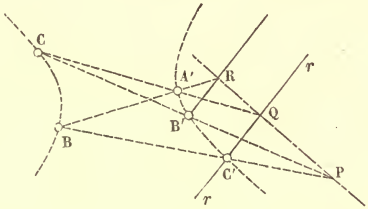
(1) Brianchon, *loc. cit.*, p. 38; — Poncelet, *loc. cit.*, n° 209.

(2) Newton, *loc. cit.*, prop. XXII; — Maclaurin, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus* (Londres, 1748), § 44.

I. Si, au contraire, le point A est à l'infini, le problème devient le suivant :

Étant donnés quatre points B′CA′B et la direction d'une asymptote d'une hyperbole, trouver l'intersection de cette courbe avec une droite donnée r parallèle à l'asymptote (*fig.* 98).

Fig. 98.

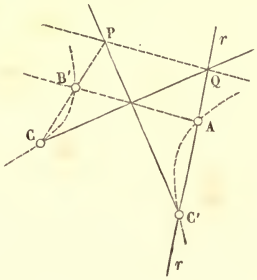


Solution. — Joignons le point R, commun à A′B et à la droite menée par B′ dans la direction donnée, au point Q commun à A′C et à la droite donnée ; puis tirons une droite par le point B et le point P commun à QR, B′C ; BP coupera la droite au point cherché C′.

II. Si les points A′, B sont à l'infini, nous avons le problème suivant :

Étant donnés trois points A, B′, C et les directions des asymptotes d'une hyperbole, trouver le second point commun à la courbe et à une droite donnée r passant par A (*fig.* 99).

Fig. 99.

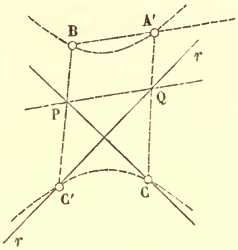


Solution. — Par le point Q, commun à r et à la droite menée par C dans la direction de la première asymptote, on mène la parallèle à AB′ : elle coupe B′C en P ; par P on mène la parallèle à la seconde asymptote : lle coupera r au point cherché C′.

II. Si les points A, B′ sont à l'infini, le problème résolu par la construction précédente est celui-ci :

On donne trois points C, A′, B et les directions de deux asymptotes d'une hyperbole, trouver l'intersection de la courbe avec une droite donnée r parallèle à la première asymptote (*fig.* 100).

Fig. 100.

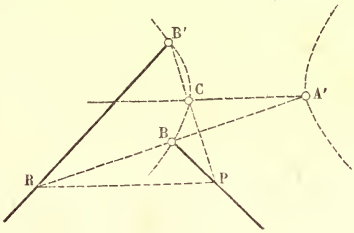


Solution. — Par le point Q, commun à r et à CA′, menons une parallèle à A′B : elle coupera en P la parallèle à la seconde asymptote tracée par C, BP coupera la droite donnée au point cherché C′.

IV. Supposons encore les points B′, C, A′, B à distance finie et la droite AC′ à l'infini ; nous aurons alors le problème :

Connaissant quatre points B′, C, A′, B d'une hyperbole et la direction d'une asymptote, trouver la direction de l'autre asymptote (*fig.* 101).

Fig. 101.



Solution. — Du point R commun à A′B et à la droite tracée par B′ dans la direction donnée, menons la parallèle à CA′ : elle coupera en P la droite B′C. BP sera la direction demandée.

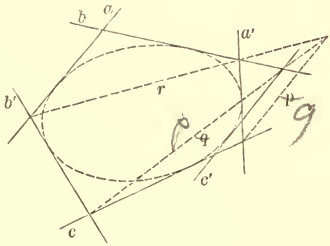
Tous ces problèmes ne sont que des cas particuliers du n° **124** à droite ; il sera bon que l'élève s'exerce à déduire les constructions pour les cas particuliers de la construction générale ; il suffit pour cela de se rappeler que joindre un point à distance finie à un point à l'infini dans une direction donnée, c'est mener par le premier point une parallèle à la direction donnée.

126. Examinons de la même manière les cas particuliers du problème n° 124, à gauche, en supposant qu'un des éléments donnés s'éloigne à l'infini.

Supposons d'abord que le point ac' soit à l'infini; le problème à résoudre est celui-ci :

Étant données cinq tangentes a, b', c, a', b d'une conique, construire la tangente parallèle à une des tangentes données, à a par exemple (*fig.* 102).

Fig. 102.



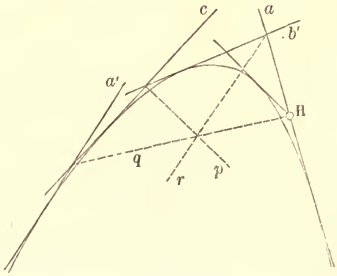
Solution. — Construisons la droite r qui joint les points ab', $a'b$, la droite q qui passe par le point $a'c$ et est parallèle à a et la droite p qui joint les points qr, $b'c$. La tangente cherchée c' passera par le point pb.

D'un point quelconque du plan d'une conique, on peut lui mener deux tangentes au plus (n° 18); d'un point donné sur une tangente on ne peut mener qu'une autre tangente. Donc, si une conique est une parabole, deux de ses tangentes ne peuvent jamais être parallèles.

I. Si la droite b est à l'infini, nous aurons le problème :

Quatre tangentes a, b', c, a' d'une parabole étant données, construire la tangente qui passe par un point H de a (*fig.* 103).

Fig. 103.



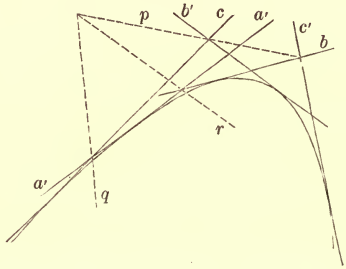
Solution. — Construisons la droite r qui passe par ab' et est parallèle

à a', la droite q qui joint le point donné H au point $a'c$, et la droite p qui joint les points qr, $b'c$. La tangente cherchée sera parallèle à p.

II. Si la droite a est à l'infini, nous avons le problème :

Étant données quatre tangentes b', c, a', b d'une parabole, construire la tangente parallèle à une droite donnée (*fig.* 104).

Fig. 104.



Solution. — Construisons la droite r qui passe par le point $a'b$ et est parallèle à b', la droite q qui passe par le point $a'c$ et qui a la direction donnée, et la droite p qui joint les points $b'c$, qr. La tangente cherchée passera par le point pb.

III. Si la position de H sur a varie dans le problème I, ou si la direction donnée varie dans le problème II, on parvient à la solution du problème.

Construire les tangentes à la parabole déterminée par quatre tangentes données.

§ XVI. — Corollaires des théorèmes de Pascal et Brianchon.

127. Nous avons déjà développé quelques propositions et constructions (nos **124** et suivants) qui sont des conséquences immédiates des théorèmes de Pascal et Brianchon et qui résultent de l'hypothèse d'éléments s'éloignant à l'infini. On obtient d'autres corollaires si l'on suppose que deux des six points ou des six tangentes soient infiniment voisins [1].

Si AB′CA′BC′ sont six points d'une conique, le théorème de Pascal dit que les faisceaux A (A′B′CC′), B (A′B′CC′), par exemple, sont projectifs. Au rayon AB du premier correspond

---

[1] Carnot, *loc. cit.*, p. 455-456.

la tangente en B à la conique, de manière que l'on peut dire que le groupe des quatre droites

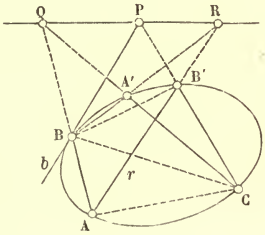
$$AA', \quad AB', \quad AC, \quad AB$$

est projectif au groupe formé de

$$BA', \quad BB', \quad BC$$

et de la tangente en B; cela revient évidemment à supposer que le point C', pris d'abord dans une position quelconque sur la courbe, est devenu infiniment voisin de B. L'hexagone inscrit est donc remplacé par la figure que forment le pentagone inscrit AB'CA'B et la tangente b au sommet B (*fig.* 105), et le théorème de Pascal devient celui-ci :

Fig. 105.



Si un pentagone (AB'CA'B) *est inscrit dans une conique, le point commun à deux côtés non consécutifs* (AB', A'B), *le point commun à deux autres côtés non consécutifs* (AB, CA'), *et le point où le cinquième côté* (B'C) *rencontre la tangente au sommet opposé* (B) *sont une ligne droite.*

Nous pouvons déduire aussi ce corollaire de la construction (n° 66 à droite) de deux faisceaux projectifs. Étant donnés les couples de rayons correspondants AA' et BA', AC et BC, AB' et BB', coupons les deux faisceaux par les transversales CA', CB', et soit R le point de concours de A'B, AB'; alors deux rayons correspondants quelconques des faisceaux A, B devront couper respectivement les transversales CA', CB' en deux points alignés avec R. Donc, pour obtenir le rayon du second faisceau qui correspond à AB, c'est-à-dire la tangente en B, il suffit de joindre R au point Q commun à CA', AB; la droite demandée sera celle qui va du point B au point P intersection de CB', QR. Cette construction coïncide précisément avec le corollaire ci-dessus énoncé.

128. Ce corollaire sert à résoudre les deux problèmes suivants :

1° Étant donnés cinq points A, B′, C, A′, B d'une conique, construire la tangente en un des points donnés B (*fig.* 105).

Solution. — Joignons le point Q, commun à AB, CA′ au point R commun à AB′, A′B, et soit P l'intersection de B′C, QR. La tangente demandée sera BP [1].

Cas particuliers. — Un des points AB′CA′ est à l'infini. Connaissant quatre points d'une hyperbole et la direction d'une asymptote, construire la tangente en un des points donnés.

B est à l'infini. Connaissant quatre points d'une hyperbole et la direction d'une asymptote, construire cette asymptote.

Deux des points AB′, CA′ sont à l'infini. Connaissant trois points d'une hyperbole et la direction des asymptotes, construire la tangente en un des points donnés.

B et un des autres points sont à l'infini. Connaissant trois points d'une hyperbole et la direction des asymptotes, construire une asymptote.

2° Étant donnés quatre points ABA′C d'une conique et la tangente en B, construire la conique par points ; par exemple, trouver le point de la courbe qui se trouve sur une droite donnée r passant par A (*fig.* 105).

Solution. — Soient R le point commun à r, A′B ; Q le point où AB coupe CA′ ; et P le point commun à QR et à la tangente donnée. Le point cherché sera celui où CP coupe la droite donnée.

Si l'on suppose à l'infini un ou deux des points AA′C, ou le point A et la droite r, ou le point B, ou le point B et un des autres points, ou le point B et la tangente donnée, on a les cas particuliers suivants :

Construire par points l'hyperbole dont on connaît trois points, la tangente en un d'eux et la direction d'une asymptote ; ou deux points, la tangente en un d'eux et la direction des asymptotes ; ou trois points et une asymptote ; ou deux points, une asymptote et la direction de l'autre.

Construire la parabole dont on donne trois points à distance finie et la direction des droites qui concourent au point à l'infini.

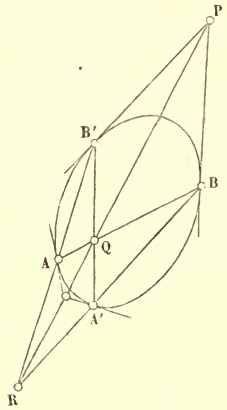
129. Revenons maintenant à l'hexagone AB′CA′BC′ inscrit dans une conique, et supposons que, non-seulement C′ soit infiniment voisin de B, mais aussi que B′ et C soient infiniment voisins, la figure nous donnera alors un quadrangle in-

---

[1] Maclaurin, *loc. cit.*, § 40.

scrit AB′A′B avec les tangentes aux sommets B, B′ (*fig.* 106), et le théorème de Pascal devient celui-ci :

Fig. 106.



Si un quadrangle est inscrit dans une conique, le point commun aux tangentes en deux sommets opposés est en ligne droite avec les deux points de concours des couples de côtés opposés (1).

C'est une propriété déjà remarquée ailleurs (n° 67, à droite). En effet, considérons les faisceaux projectifs dont les rayons correspondants sont BA et B′A, BA′ et B′A′,..., la droite qui joint le point Q commun à BA et B′A′ au point R commun à B′A, BA′ doit passer par l'intersection P des rayons qui correspondent à la droite qui joint les centres B, B′.

130. Le corollaire qui précède sert à résoudre les problèmes suivants :

1° Étant donnés quatre points AB′A′B d'une conique et la tangente BP en B, construire la tangente en B′ (*fig.* 106).

Solution. — Soient Q le point commun à AB, A′B′; R le point commun à AB′, A′B; et P le point commun à la tangente donnée et à QR. La tangente demandée sera B′P (2).

---

(1) Maclaurin, *loc. cit.*, § 36.
(2) Maclaurin, *loc. cit.*, § 38.

En supposant à l'infini un des points donnés ou la droite donnée, on obtient la solution des problèmes particuliers qui suivent :

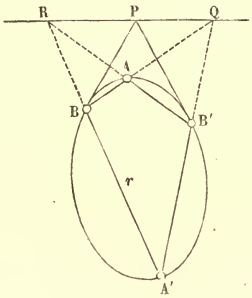
Construire la tangente en un point donné d'une hyperbole dont on connaît ou deux autres points, la tangente en un d'eux et la direction d'une asymptote ; ou un autre point avec sa tangente et les directions des asymptotes ; ou deux autres points et une asymptote ; ou un autre point, une asymptote et la direction de l'autre asymptote.

Construire l'asymptote donnée en direction d'une hyperbole dont on connaît, en outre, trois points et la tangente en un d'eux ; ou deux points, la tangente en un d'eux et la direction de la seconde asymptote ; ou deux points et la seconde asymptote.

Construire la tangente en un point donné de la parabole dont on connaît deux autres points à distance finie et la direction sur laquelle est le point à l'infini.

2° Construire par points la conique dont on donne trois points ABB′ et les tangentes BP, B′P ; par exemple, construire le point A′ où la courbe est coupée par une droite quelconque r menée par B (*fig.* 107).

Fig. 107.



Solution. — Joignons le point P commun aux tangentes données au point R où r coupe AB′ ; soit Q l'intersection de AB, PR. La droite B′Q coupera r au point cherché A′.

Supposons à l'infini un des points ABB′, ou une des droites BP, B′P, r, on aura les solutions des cas particuliers suivants :

Construire par points l'hyperbole dont on donne deux points avec leurs tangentes et la direction d'une asymptote ; ou un point avec sa tangente, une asymptote et la direction de l'autre asymptote ; ou les deux asymptotes et un point.

Construire par points la parabole dont on donne deux points, la tangente en un d'eux et la direction des droites qui concourent au point de l'infini.

131. Les tangentes aux deux autres sommets A et A′ du quadrangle ABA′B′ (*fig.* 107) se coupent aussi sur la droite qui joint le point (AB, A′B′) au point (AB′, A′B); donc :

Si un quadrangle est inscrit dans une conique, les points où se coupent les côtés opposés et les points où se coupent les tangentes aux sommets opposés sont quatre points en ligne droite.

132. Écrivons maintenant C, D, E, G à la place de A′, B′, R, Q (*fig.* 108). Dans le quadrangle inscrit ABCD, le point commun aux tangentes en A et C, le point commun aux tangentes en B et D, le point commun aux côtés AD, BC et le point commun aux côtés AB, CD sont donc sur une même droite EG.

Les mêmes points A, B, C, D, pris dans un autre ordre, forment deux autres quadrangles inscrits ACDB, ACBD. Donc, si l'on applique le dernier théorème au quadrangle inscrit ACDB, on trouve que le point commun aux tangentes en A et D, le point commun aux tangentes en C et B, le point commun aux côtés AB, CD et le point commun aux côtés AC, BD sont tous sur une même droite FG. De même le quadrangle inscrit ACBD donne quatre points sur la même droite EF : les intersections des tangentes en A et B, des tangentes en C et D, des côtés AD, CB et des côtés AC, BD [1].

Les trois droites EG, FG, EF, que l'on obtient ainsi, sont les côtés du triangle diagonal (n° 30, 2°) du quadrangle complet dont les sommets sont les quatre points donnés; et comme les mêmes droites renferment aussi les intersections des couples de tangentes en ces points, elles sont donc aussi les diagonales du quadrilatère complet formé par ces quatre tangentes; ou :

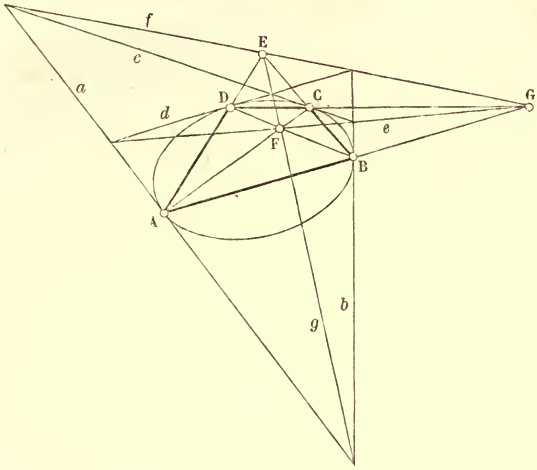
Le quadrilatère complet formé par quatre tangentes à une conique et le quadrangle complet formé par leurs quatre points de contact ont le même triangle diagonal.

---

[1] Maclaurin, *loc. cit.*, § 50. — Carnot, *loc. cit.*, p. 453-454.

Dans la *fig.* 108, *a*, *b*, *c*, *d* sont les quatre tangentes, A, B, C, D les quatre points de contact, EFG est le triangle diagonal.

Fig. 108.



133. Dans le quadrilatère complet *abcd*, la diagonale dont les extrémités sont aux points *ac*, *bd* coupe les deux autres diagonales en E, G; ces quatre points sont donc harmoniques (48). La proposition corrélative est celle-ci : les deux côtés opposés du quadrangle complet inscrit ABCD qui concourent en F sont séparés harmoniquement par les droites qui vont aux deux autres points diagonaux E, G (n° 49). On peut donc énoncer la proposition suivante (*fig.* 108) :

Quand un quadrilatère (*simple*) *inscrit* (ABCD) *a pour sommets consécutifs les points de contact consécutifs d'un quadrilatère* (*simple*) *circonscrit* (*abcd*), 1° *les diagonales des deux quadrilatères passent par un même point* (F) *et forment un groupe harmonique;* 2° *les points de concours des couples de côtés opposés des deux quadrilatères sont en ligne droite* (EG) *et séparés harmoniquement;* 3° *les diagonales du quadrilatère circonscrit passent par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit* [1].

---

[1] Chasles, *Sect. coniques*, n° 121.

134. En s'appuyant sur le théorème du n° 132, on peut, si l'on donne quatre tangentes *abcd* d'une conique (*fig.* 108) et un de leurs points de contact, trouver immédiatement les trois autres; et, si l'on donne quatre points A, B, C, D et la tangente en un d'eux, construire les tangentes aux trois autres points [1].

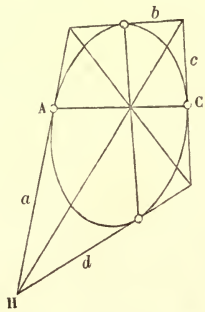
Solution. — Construisons le triangle diagonal EFG du quadrilatère complet *abcd*; AG, AF, AE rencontreront respectivement *b*, *c*, *d* en B, C, D.

Construisons le triangle diagonal *efg* du quadrangle complet ABCD; les points *ag*, *af*, *ae* appartiendront respectivement aux tangentes demandées *b*, *c*, *d*.

135. Si nous considérons les quatre droites *abcd* comme formant un quadrilatère (non complet) circonscrit à la conique, nous pouvons donner au théorème du n° 132 l'énoncé suivant, qui est déjà compris dans celui du n° 133 [2] :

Si un quadrilatère est circonscrit à une conique, les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par le point commun aux diagonales (*fig.* 109).

Fig. 109.



Cette propriété se confond avec une autre propriété déjà démontrée à propos de deux ponctuelles projectives (n° 67, à gauche). En effet, considérons les deux ponctuelles projectives *a* et *c*, dans lesquelles *ab* et *cb*, *ad* et *cd*,... sont des points correspondants, la droite qui joint les points *ab* et *cd* et celle qui joint les points *cb* et *ad* se coupent sur la droite qui joint les points correspondant au point *ac*, c'est-à-dire sur la droite qui joint les points de contact de *a* et *c*.

---

(1) Maclaurin, *loc. cit.*, § 38 et 39.

(2) Newton, *loc. cit.*, cor. II au lemme XXIV.

Dans le cas où la conique est une hyperbole, si l'on considère le quadrilatère formé par les asymptotes et deux tangentes quelconques, la proposition ci-dessus exprime que les diagonales sont parallèles à la corde qui joint les points de contact des deux tangentes [1].

136. Le théorème qui précède sert à résoudre le problème :

Construire par tangentes la conique dont on donne trois tangentes a, b, c et deux points de contact A, C; par exemple, mener une nouvelle tangente par un point H donné sur a (*fig.* 109).

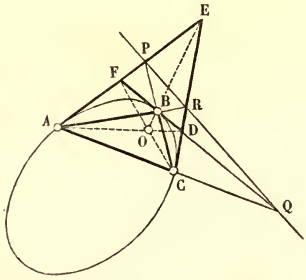
Solution. — Joignons le point ab au point commun à AC et à H (bc); cette droite rencontrera c en un point qui, joint à H, donnera la tangente demandée d.

Si l'on suppose qu'un des points A, C ou une des tangentes données soit à l'infini, on obtiendra les solutions des divers cas particuliers :

Construire par tangentes l'hyperbole dont on donne une asymptote, deux tangentes et un point de contact, ou les deux asymptotes et une tangente; construire par tangentes la parabole dont on connaît le point à l'infini, deux tangentes et un point de contact, ou deux tangentes et leurs points de contact.

137. Si nous supposons que les points A et B′, C et A′, B et C′ soient infiniment voisins, dans le théorème de Pascal, nous aurons (*fig.* 110) un triangle inscrit ABC et les tangentes aux sommets; donc :

Fig. 110.



Si un triangle est inscrit dans une conique, les tangentes aux sommets rencontrent les côtés respectivement opposés en trois points en ligne droite.

---

[1] Apollonius, *loc. cit.*, III, 44.

138. Ce théorème résout le problème :

On donne trois points A, B, C d'une conique, les tangentes en A et B; construire la tangente en C (*fig.* 110).

Solution. — Les tangentes données rencontrent respectivement BC, CA en P, Q; PQ rencontre AB en R; CR sera la tangente demandée.

Les problèmes suivants sont des cas particuliers du précédent :

Étant donnés deux points A, B d'une hyperbole, les tangentes en ces points et la direction d'une asymptote, construire cette asymptote.

On donne une asymptote d'une hyperbole, un point A et sa tangente, et la direction de l'autre asymptote; construire cette dernière droite.

On donne les deux asymptotes d'une hyperbole et un point C; construire la tangente en C.

On donne deux points A, C d'une parabole, la tangente en A, la direction des droites qui concourent au point de l'infini; construire la tangente en C.

139. Le triangle inscrit ABC et le triangle DEF fourni par les tangentes (*fig.* 110) jouissent donc de la propriété que les couples de leurs côtés BC et EF, CA et FD, AB et DE se coupent en trois points d'une droite. Par suite, les deux triangles sont homologiques, c'est-à-dire (n° 16) les droites AD, BE, CF qui joignent leurs sommets, passent par un même point O; ou bien :

Si un triangle est circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés respectivement opposés concourent en un point.

140. Ce théorème permet de résoudre le problème :

Étant données trois tangentes d'une conique et deux points de contact, trouver le troisième.

Solution. — Soient DEF (*fig.* 110) le triangle circonscrit formé par les tangentes données, A et B les points de contact de EF, FD. Les droites AD et BE concourent en O; FO coupera DE au point demandé C.

Cas particuliers. — On donne deux tangentes, une asymptote d'une hyperbole et le point de contact d'une des tangentes; construire le point de contact de l'autre.

On donne deux asymptotes et une tangente d'une hyperbole; construire son point de contact.

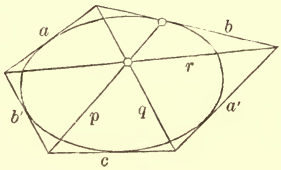
On donne deux tangentes d'une parabole avec leurs points de contact, construire la direction des droites qui concourent au point de l'infini.

On donne deux tangentes à une parabole, le point de contact de l'une d'elles et le point à l'infini ; construire le point de contact de l'autre tangente.

141. Nous avons déduit du théorème de Pascal des théorèmes spéciaux concernant le pentagone, le quadrangle et le triangle inscrits ; on peut déduire de la même manière du théorème de Brianchon les propositions corrélatives concernant le pentagone, le quadrilatère et le triangle circonscrits.

En effet, si l'on suppose que, des six tangentes a, b', c, a', b, c' formant l'hexagone circonscrit (n° **117**, à gauche), deux, b et c', par exemple, deviennent infiniment voisines, comme une tangente rencontre la tangente infiniment voisine en son point de contact (n^{os} **110, 113**), l'hexagone se changera en la figure composée du pentagone circonscrit $ab'ca'b$ et du point de contact du côté b (*fig.* 111). Le théorème de Brianchon donne alors celui-ci :

Fig. 111.



Si un pentagone est circonscrit à une conique, deux diagonales joignant deux couples de sommets différents et la droite qui joint le cinquième sommet au point de contact du côté opposé concourent en un même point.

Ce théorème se confond avec une propriété des ponctuelles projectives déjà signalée (n° 66, à droite). Supposons, en effet, que l'on ait sur les droites a, b les ponctuelles projectives déterminées par les sécantes a', b', c ; si la première ponctuelle est projetée du point ca', et la seconde du point cb', on a deux faisceaux perspectifs dont la section commune est la droite r qui joint les points ab, ba'. Donc, si l'on demande le point de la seconde ponctuelle qui correspond au point ab de la première, c'est-à-dire le point de contact de la tangente b, il suffira de tirer la droite q qui projette ab de ca', puis la droite p par les points cb', qr ; le point pb sera le point demandé.

La propriété du pentagone circonscrit que nous venons d'établir donne le moyen de résoudre les problèmes suivants :

1° Étant données cinq tangentes d'une conique, trouver le point de contact de l'une d'elles [1].

Cas particulier. — Étant données quatre tangentes d'une parabole, trouver leurs points de contact et le point à l'infini.

2° Construire par tangentes la conique dont on donne quatre tangentes et un point de contact.

Cas particuliers. — Construire par tangentes une hyperbole dont on donne trois tangentes et une asymptote.

Construire par tangentes une parabole dont on donne trois tangentes et le point à l'infini, ou trois tangentes et un point de contact.

Les corollaires du théorème de Brianchon relatifs au quadrilatère et au triangle inscrits ne sont autres que les théorèmes des n°s 135 et 139; ils sont corrélatifs aux théorèmes des n°s 129 et 137, comme les théorèmes des n°s 127 et 141 sont corrélatifs entre eux.

Ce sera un exercice très-utile à l'élève que de résoudre tout seul les problèmes énoncés dans la présente section (§ XVI) ; les constructions se ramènent toutes à deux, corrélatives entre elles et données immédiatement par les théorèmes de Pascal et Brianchon.

142. Les corollaires des théorèmes de Pascal et Brianchon montrent que, de même qu'une conique est déterminée par cinq points ou cinq tangentes, de même elle est déterminée par quatre points et la tangente en un d'eux; par quatre tangentes et un point de contact, par trois points et les tangentes en deux d'entre eux, par trois tangentes et deux points de contact. D'où il résulte que :

1° Une infinité de coniques peuvent passer par trois points et être tangentes à une droite donnée en un de ses points, ou passer par deux points donnés et y toucher deux droites données; mais deux quelconques de ces coniques ne peuvent avoir un autre point commun ;

2° Une infinité de coniques peuvent toucher une droite donnée en un point donné et deux autres droites données, ou deux droites données en des points donnés ; deux quelconques de ces coniques n'ont aucune autre tangente commune.

Donc, si deux coniques sont tangentes à une droite donnée en un même point (c'est-à-dire si les coniques sont tangentes entre elles en ce point), elles ne peuvent avoir, en outre, plus de deux tangentes ou plus de deux points communs ; si deux coniques sont tangentes à deux droites données

---

[1] Maclaurin, *loc. cit.*, § 41.

en des points donnés (c'est-à-dire si deux coniques sont tangentes entre elles en deux points), elles ne peuvent avoir en commun ni d'autres points ni d'autres tangentes.

On peut dire aussi que, si deux coniques sont tangentes à une droite a en un point A, celui-ci équivaut à deux points d'intersection, et la droite a équivaut à deux tangentes communes.

§ XVII. — Théorème de Desargues.

143. Un quadrangle QRST est inscrit dans une conique (*fig.* 112), une transversale arbitraire s coupe les côtés QT, RS, QR, TS aux points A, A′, B, B′ et la conique aux points P, P′.

Un quadrilatère $qrst$ (*fig.* 113) est circonscrit à une conique, d'un point arbitraire S on mène les droites a, a', b, b' aux sommets qt, rs, qr, ts du quadrilatère, et les tangentes p, p' à la conique.

Fig. 112.

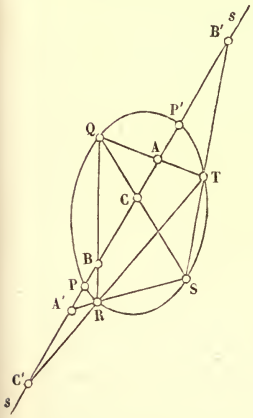
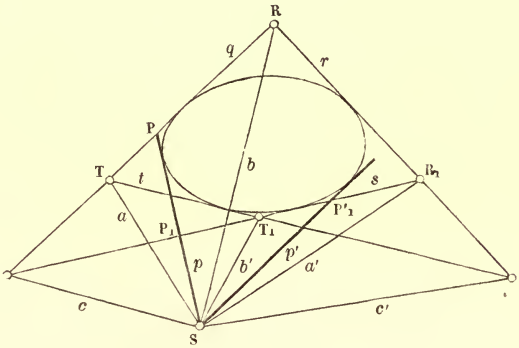


Fig. 113.



Les deux groupes de rayons qui, de Q et de S, projettent les points P, R, P′, T de la conique sont projectifs (n° 113) : donc les deux groupes de points PBP′A, PA′P′B′ où ces rayons sont coupés par la transversale s sont aussi projectifs. Donc (n° 56) les groupes PBP′A,

Les deux groupes de points où q et s coupent les tangentes p, r, p', t de la conique sont projectifs (n° 113) : donc les deux groupes de rayons $pbp'a$, $pa'p'b'$ qui projettent ces points de S sont aussi projectifs. Donc (n° 56) les groupes $pbp'a$, $p'b'pa'$ sont projectifs, c'est-

P′B′PA′ sont projectifs, c'est-à-dire que (n° 94)

$$PP'.AA'.BB'$$

sont trois couples de points en involution.

C'est le théorème de DESARGUES [1] :

Une transversale quelconque rencontre une conique et les côtés opposés d'un quadrangle inscrit en trois couples de points conjugués en involution.

à-dire que (n° 94)

$$pp'.aa'.bb'$$

sont trois couples de rayons en involution.

C'est le théorème corrélatif de celui de DESARGUES :

Les tangentes menées d'un point quelconque à une conique et les droites menées du même point aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit forment trois couples de rayons conjugués en involution.

144. Ce théorème peut servir, comme le théorème de PASCAL (n° 117, à droite), à construire par points la conique dont on donne cinq points PQRST (*fig.* 112). En effet, menons par P une transversale arbitraire s qui coupe QT, RS, QR, TS en A, A′, B, B′; puis construisons le point P′ conjugué de P dans l'involution déterminée par les couples de points AA′, BB′ (n° 102) et P′ sera un point de la conique à décrire.

Ce théorème peut servir, comme le théorème de BRIANCHON (n° 117, à gauche), à construire par tangentes la conique dont on donne cinq tangentes *pqrst* (*fig.* 113). En effet, prenons sur p un point arbitraire S et tirons de ce point les rayons a, a', b, b' aux points qt, rs, qr, ts; puis construisons (n° 102) le rayon p' conjugué de p dans l'involution déterminée par les couples de rayons aa', bb'; p' sera une tangente de la conique à construire.

145. Le couple CC′ des points où la transversale coupe les diagonales QS, RT du quadrangle inscrit appartient aussi (n° 101, à gauche) à l'involution déterminée par les points AA′, BB′.

En outre, comme les points AA′, BB′ suffisent pour déterminer l'involution, les points PP′ sont des points conjugués de cette involution, quelle que soit la conique circonscrite au quadrangle QRST; donc :

Le couple cc' des rayons qui projettent de S les points qs, rt de concours des côtés opposés du quadrilatère circonscrit appartient aussi (n° 101, à droite) à l'involution déterminée par les rayons aa', bb'.

En outre, comme les rayons aa', bb' suffisent pour déterminer l'involution, les rayons pp' sont conjugués dans cette involution, quelle que soit la conique inscrite dans le quadrilatère *qrst*; donc :

---

[1] *Loc. cit.*, p. 171, 176.

Toutes les coniques circonscrites à un même quadrangle sont coupées par une transversale quelconque en couples de points en involution.

Si l'involution a des points doubles, chacun d'eux tiendra lieu de deux intersections PP′ coïncidentes (ou infiniment voisines), c'est-à-dire sera le point de contact entre la transversale et une conique circonscrite au quadrangle.

Donc il y a deux coniques qui passent par quatre points donnés QRST et sont tangentes à une droite donnée s (qui ne passe par aucun des points donnés) ou il n'y a aucune conique qui satisfasse à ces conditions.

146. De six points AA′, BB′, PP′ formant trois couples en involution, si l'on en donne cinq, le sixième est déterminé (n° 102). Par suite, si, dans la *fig.* 112, nous supposons la conique donnée et le quadrangle variable de manière que les points AA′B soient fixes, le point B′ est aussi invariable; donc :

Si un quadrangle se déforme, sans cesser d'être inscrit dans une conique, mais de manière que trois de ses côtés tournent autour de trois points fixes en ligne droite, le quatrième côté tournera aussi autour d'un quatrième point fixe de la même droite.

Les couples de tangentes menées d'un point quelconque aux coniques inscrites dans un même quadrilatère forment une involution.

Si l'involution a des rayons doubles, chacun d'eux tiendra lieu de deux tangentes pp' coïncidentes (ou infiniment voisines), c'est-à-dire sera tangent en S à une conique inscrite au quadrilatère.

Donc il y a deux coniques qui sont tangentes à quatre droites données $qrst$ et passent par un point donné S (non situé sur une des droites données), ou il n'y a aucune conique qui satisfasse à ces conditions.

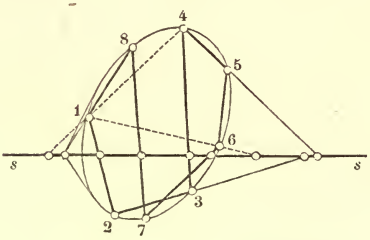
De six rayons aa', bb', pp' formant trois couples en involution, si l'on en donne cinq, le sixième est déterminé (n° 102). Par suite, si, dans la *fig.* 113, nous supposons la conique donnée et le quadrilatère variable, de manière que les rayons $aa'b$ soient fixes, le rayon b' restera aussi invariable; donc :

Si un quadrilatère se déforme sans cesser d'être circonscrit à une conique, mais de manière que trois de ses sommets parcourent trois droites fixes issues d'un même point, le quatrième sommet parcourra aussi une quatrième droite fixe issue du même point.

Le même théorème (à gauche) subsiste pour un polygone quelconque inscrit, d'un nombre pair de côtés. Supposons que le polygone inscrit ait $2n$ côtés et qu'il se déforme de manière que ses $2n-1$ premiers côtés passent respectivement par autant de points fixes situés sur une droite s

(*fig.* 114). Menons les diagonales du premier sommet au quatrième, au sixième, au huitième,.., au $2(n-1)^{ième}$, le po-

Fig. 114.



lygone sera ainsi divisé en $n-1$ quadrangles simples. Dans le premier de ces quadrangles, les trois premiers côtés (qui sont les trois premiers côtés du polygone) passent par trois points fixes de s : donc le quatrième côté (qui est la première diagonale du polygone) passera par un point fixe de s. Dans le second quadrangle, les trois premiers côtés (la première diagonale, le quatrième et le cinquième côté du polygone) passent par trois points fixes de s : donc le quatrième côté (deuxième diagonale du polygone) passera par un point fixe de s. En continuant de la même manière, on arrivera au dernier quadrangle et l'on trouvera que le quatrième côté de ce quadrangle, ou le $2n^{ième}$ côté du polygone, passe aussi par un point fixe de s. Donc :

Si un polygone d'ordre pair $2n$ se déforme, sans cesser d'être inscrit dans une conique et de manière que ses côtés, moins un, passent par autant de points fixes en ligne droite, le dernier côté passera aussi par un point de la même droite [1].

Si l'on peut mener des tangentes à la conique du point fixe autour duquel tourne le dernier côté et si l'on considère chacune d'elles comme position du dernier côté, les deux sommets situés sur ce côté coïncideront, et le polygone n'aura plus que $2n-1$ sommets. Le point de contact de cha-

---

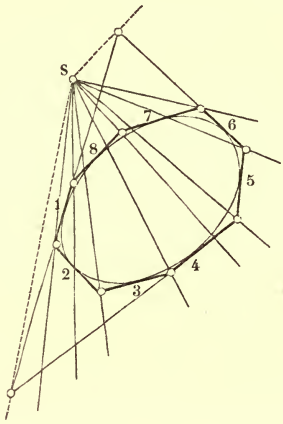
[1] Poncelet, *loc. cit.*, n° 513.

cune des deux tangentes sera donc un sommet d'un polygone d'ordre $2n - 1$ inscrit dans la conique dont les côtés passeront par les $2n - 1$ points donnés.

L'élève pourra s'exercer à démontrer le théorème corrélatif :

Si un polygone d'ordre pair $2n$ se déforme, sans cesser d'être circonscrit à une conique donnée, de manière que ses sommets, moins un, parcourent autant de rayons fixes issus d'un même centre, le dernier sommet parcourra aussi un rayon fixe issu de ce centre (*fig.* 115).

Fig. 115.



Si ce dernier rayon coupe la conique en deux points et qu'en chacun d'eux on mène la tangente, celle-ci sera le côté d'un polygone d'ordre $2n - 1$ circonscrit à la conique, et ayant ses sommets sur les $2n - 1$ droites données.

147. Supposons les points S, T infiniment voisins sur la conique (*fig.* 116) ou la droite ST tangente en S; le quadrangle QRST devient alors un triangle inscrit QRS et l'on conclut du théorème de DESARGUES que :

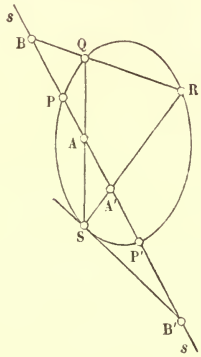
Si un triangle QRS *est inscrit dans*

Supposons les tangentes s, t infiniment voisines (*fig.* 117) ou s tangente à la conique au point st; le quadrilatère $qrst$ devient un triangle circonscrit qrs et l'on conclut du théorème n° 144 (à droite) que :

Si un triangle qrs est circonscrit

une conique et si une transversale s rencontre la courbe en deux points PP′, *deux côtés du triangle aux points* AA′, *le troisième côté et la tangente au sommet opposé aux points* BB′, *ces trois couples de points sont en involution.*

Fig. 116.

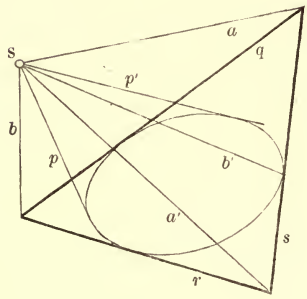


148. Ce théorème donne une construction de la tangente en S à la conique dont on donne cinq points PP′QRS. En effet, soient A, A′, B les points où la droite PP′ rencontre QS, RS, QR; construisons (n° 102) le point B′ conjugué de B dans l'involution déterminée par les deux couples AA′, PP′; B′S sera la tangente demandée.

149. Supposons maintenant que les points QR (*fig.* 118) soient aussi infiniment voisins sur la conique, c'est-à-dire que QR soit tangente en Q; au lieu des côtés du quadrangle inscrit QRST, on aura

à une conique et si, d'un point S, *on mène les tangentes pp′ à la conique, puis à deux sommets du triangle les droites aa′, et enfin les droites bb′ au troisième sommet et au point de contact du côté opposé, ces trois couples de droites sont en involution.*

Fig. 117.

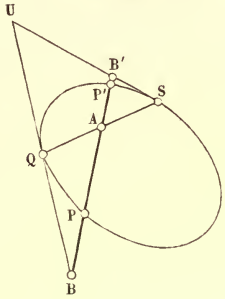


Ce théorème donne une construction du point de contact de la tangente *s* avec la conique dont on donne les tangentes *pp′qrs*. En effet, soient *a*, *a′*, *b* les rayons qui, du point *pp′*, projettent les points *qs*, *rs*, *qr*; construisons (n° 102) le rayon *b′* conjugué de *b* dans l'involution déterminée par les couples *aa′*, *pp′*; *b′s* sera le point de contact demandé.

Supposons maintenant que les tangentes *q*, *r* soient aussi infiniment voisines, c'est-à-dire que *q* soit tangente à la conique au point *qr*; au lieu des sommets du quadrilatère circonscrit *qrst*, on aura les

les deux tangentes aux points Q, S et la corde de contact QS [1]. Comme les droites QT, RS se con-

Fig. 118.



fondent maintenant en une seule droite QS, les points A, A′ se confondront aussi en un point unique, qui sera, par conséquent, un des éléments doubles de l'involution déterminée par les couples PP′, BB′. Le théorème de DESARGUES devient donc celui-ci :

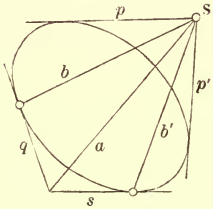
Si une transversale coupe une conique en deux points PP′, *deux de ses tangentes en deux autres points* BB′ *et la corde de contact en* A, *ce dernier point sera un point double de l'involution déterminée par les couples* PP′, BB′; ou :

Si une conique variable touche deux droites données et passe par deux points donnés PP′, *la corde de contact passe par un point fixe de* PP′.

Si les tangentes QU, SU varient en même temps que la conique, les

points de contact des deux tangentes *qs* et le point *qs* de leur concours (*fig.* 119). Comme les

Fig. 119.



points *qt*, *rs* se confondent maintenant en un point unique *qs*, les rayons *a*, *a′* se confondront aussi en un rayon unique qui sera, par conséquent, un des éléments doubles de l'involution déterminée par les couples *pp′*, *bb′*. Nous concluons donc du théorème n° 144 (à droite) que :

Si d'un point S *on mène les tangentes pp′ à une conique, si du même point on projette deux points de la courbe et le point commun aux tangentes en ces points au moyen des rayons bb′, a, la droite a sera un rayon double de l'involution déterminée par les couples pp′, bb′*; ou :

Si une conique variable touche deux droites données pp′ et passe par deux points donnés, les tangentes en ces points concourront sur une droite fixe passant par pp′.

Si les points de contact de *q* et *s* varient en même temps que la co-

[1] C'est-à-dire la droite qui joint les points de contact des deux tangentes.

points PP′BB′ restant fixes, la corde de contact passera encore par l'un ou par l'autre des points doubles de l'involution déterminée par les couples PP′, BB′. Donc, étant donnés quatre points P, P′, B, B′ en ligne droite, si l'on trace une conique quelconque passant par PP′ et les tangentes à cette courbe issues de B et de B′; si ensuite on combine chaque tangente issue de B avec chacune des tangentes issues de B′, on obtient quatre cordes de contact qui concourent, deux à deux, aux points doubles de l'involution PP′.BB′ [1].

nique, les droites $pp'bb'$ restant fixes, le point de concours qs tombera encore sur l'un ou sur l'autre des rayons doubles de l'involution déterminée par les couples pp', bb'. Donc, étant donnés quatre rayons p, p', b, b' d'un faisceau, si l'on trace une conique quelconque tangente à p et à p' et les tangentes à cette courbe aux points où elle coupe les droites b et b'; si l'on combine ensuite chaque tangente en un point de b avec chacune des tangentes relatives à b', on obtient quatre points de concours qui se trouvent, deux à deux, sur les rayons doubles de l'involution $pp'.bb'$.

150. Il résulte de là une construction de la tangente en S à une conique déterminée par quatre points P, P′, Q, S et par la tangente en Q (*fig.* 118). En effet, soient A, B les points où PP′ rencontre QS et la tangente donnée; construisons B′ conjugué de B dans l'involution déterminée par le couple PP′ et le point double A. La droite SB′ sera la tangente cherchée.

Il résulte de là une construction du point de contact de la tangente s avec la conique déterminée par quatre tangentes p, p', q, s et par le point de contact de q (*fig.* 119). En effet, soient a, b les rayons qui de pp' projettent respectivement le point qs et le point de contact donné; construisons le rayon b' conjugué de b dans l'involution déterminée par le couple pp' et par le rayon double a. Le point cherché sera sb'.

151. Supposons que la conique soit une hyperbole (*fig.* 120) dans le théorème qui précède (149); si les tangentes données sont les asymptotes, la corde QS sera tout entière à l'infini.

L'involution (PP′.BB′...) a donc un point double à l'infini, et l'autre élément double (51) est le point milieu commun aux segments PP′, BB′,.... Donc :

Si l'on coupe une hyperbole et ses asymptotes par une transversale, le segment intercepté par la courbe et le segment intercepté par les asymptotes ont le même point milieu.

---

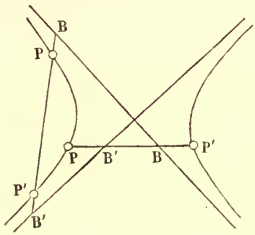
[1] Brianchon, *loc. cit.*, p. 20, 21.

Il résulte de là que

$$PB = B'P' \quad \text{et} \quad PB' = BP' \text{ (}^1\text{)};$$

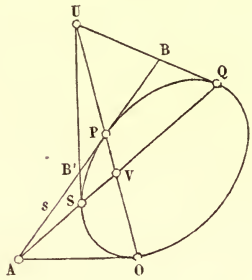
d'où une règle pour construire une hyperbole dont on donne les asymptotes et un point (²).

Fig. 120.



152. Supposons les points PP′ infiniment voisins dans le théorème du n° 149, c'est-à-dire supposons que la transversale soit tangente à la conique (*fig.* 121); le point de

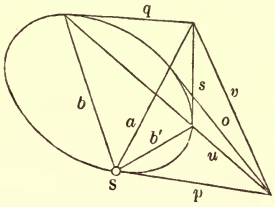
Fig. 121.



contact P sera le second point double de l'involution déterminée par le couple BB′ et par le point double A; donc les quatre points P, A, B, B′ sont harmoniques (96); ou :

Supposons les tangentes *pp′* infiniment voisines dans le théorème du n° 149, c'est-à-dire supposons que le point S soit pris sur la conique (*fig.* 122); la tangente en S

Fig. 122.



sera le second rayon double de l'involution déterminée par le couple *bb′* et par le rayon double *a*; donc les quatre rayons *p*, *a*, *b*, *b′* sont harmoniques (96); ou :

(¹) Apollonius, *loc. cit.*, II, 8, 16.
(²) Apollonius, *loc. cit.*, II, 4.

Dans un triangle circonscrit (UBB'), *chaque côté* (BB') *est divisé harmoniquement par son point de contact* (P) *et par la droite qui joint les points de contact* (Q, S) *des deux autres côtés.*

Du point A on peut mener une autre tangente; soit O son point de contact. Les points harmoniques P, A, B, B' sont le point de contact de la tangente AB, et ceux où cette tangente est coupée par les trois autres tangentes OA, QB, SB'; donc (113) les quatre tangentes AB, OA, QB, SB' seront coupées par une autre tangente quelconque en quatre points harmoniques, ce qui revient à dire que ces tangentes sont harmoniques (111). Et comme la droite QS, qui joint les points de contact des tangentes conjuguées QB, SB' passe par le point A, nous avons :

Si la corde de contact de deux tangentes passe par le point de concours de deux autres tangentes, les premières sont séparées harmoniquement par les deux autres.

Et *vice versâ :*

Si quatre tangentes à une conique sont harmoniques, la corde de contact de deux tangentes conjuguées passe par le point de concours des deux autres.

Dans un triangle inscrit (*ubb'*) *chaque angle* (*bb'*) *est divisé harmoniquement par la tangente p au sommet et la droite qui passe au point de concours des tangentes* (*q*, *s*) *aux deux autres sommets.*

La droite *a* rencontre la conique en un autre point; soit *o* la tangente en ce point. Les droites harmoniques *p*, *a*, *b*, *b'* sont la tangente en S et les droites qui joignent S à trois autres points de la conique (points de contact de *o*, *q*, *s*); donc (113) ces quatre points seront projetés d'un autre point quelconque de la conique par quatre rayons harmoniques, ce qui revient à dire que ces points sont des points harmoniques de la conique (109). Et comme le point de concours des tangentes *q*, *s* est sur la corde de contact des tangentes *p*, *o*, nous avons :

Si le point de concours des tangentes en deux points est situé sur la droite qui joint deux autres points, les deux premiers points sont séparés harmoniquement par les deux autres.

Et *vice versâ :*

Si quatre points d'une conique sont harmoniques, le point de concours des tangentes en deux points conjugués se trouve sur la droite qui joint les deux autres.

153. Ces deux énoncés corrélatifs peuvent se fondre en un seul théorème, en vertu de la propriété déjà exposée (112 et 113) que, si quatre points d'une conique sont harmoniques, les quatre tangentes en ces points le sont aussi et réciproquement. Nous pourrons donc dire :

Si deux tangentes à une conique concourent en un point de la corde de contact de deux autres tangentes, réciproquement le point de concours de celles-ci sera sur la corde de contact de celles-là, et les quatre

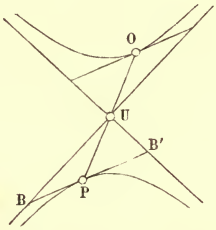
tangentes (*ainsi que leurs points de contact*) *forment un groupe harmonique* [1].

Dans la *fig.* 121, comme QS passe par A, OP passera aussi par U, point commun à QB, SB′; et comme les droites U (Q, S, P, A) sont harmoniques, les droites A (O, P, Q, U) le seront aussi.

Dans la *fig.* 122, comme le point *qs* est sur *a*, le point *op* sera aussi sur la droite *u* qui joint les points de contact de *q* et *s*; et comme les quatre points *u* (*q*, *s*, *p*, *a*) sont harmoniques, les quatre points *a* (*o*, *p*, *q*, *u*) le sont également.

154. *Exemple.* — Supposons que la conique soit une hyperbole (*fig.* 123); les asymptotes sont deux tangentes dont la corde de contact

Fig. 123.



QS est la droite de l'infini. Par suite, deux tangentes parallèles auront leurs points de contact en ligne droite avec le point U de concours des asymptotes; et réciproquement, si l'on mène par le point U une transversale qui coupe la courbe en deux points P, O, les tangentes en ces deux points seront parallèles. Le point milieu des points de contact P, O sera le point U, parce qu'en général (*fig.* 121) le groupe UVPO est harmonique et qu'ici V est à l'infini.

Une tangente quelconque coupe les asymptotes en deux points BB′ séparés harmoniquement par le point de contact P et par la corde de contact, qui est la droite de l'infini; donc P est le point milieu de BB′, ou :

La partie d'une tangente à l'hyperbole qui est comprise entre les asymptotes est divisée en deux segments égaux par le point de contact [2].

Cette proposition est un cas particulier de celle du n° 151.

155. Comme, en vertu du théorème de Desargues (143), les couples de points PP′, AA′, BB′ (*fig.* 112) sont en involution, nous avons l'égalité

---

(1) Delahire, *loc. cit.*, liv. I, p. 30. — Steiner, *loc. cit.*, p. 159.

(2) Apollonius, *loc. cit.*, II, 319.

des rapports anharmoniques $(PP'AB) = (P'PA'B')$, ou

$$\frac{PA}{P'A} : \frac{PB}{P'B} = \frac{PB'}{P'B'} : \frac{PA'}{P'A'}.$$

Mais PA : P'A est égal au rapport des distances (prises dans une direction fixée arbitrairement) des points P, P' à la droite QT; les autres rapports contenus dans l'égalité ci-dessus ont des significations analogues; on peut donc écrire

$$\frac{(A)}{(A)'} : \frac{(B)}{(B)'} = \frac{(B')}{(B')'} : \frac{(A')}{(A')'},$$

ou

$$\frac{(A).(A')}{(B).(B')} = \frac{(A)'.(A')'}{(B')'.(B')'},$$

où (A), (A'), (B), (B') désignent les distances (perpendiculaires ou obliques sous des angles donnés) du point P aux côtés QT, RS, QR, TS du quadrangle inscrit QRST, et (A)', (A')', (B)', (B')' les distances sous des angles respectivement égaux) du point P' aux mêmes côtés. L'équation précédente établit donc que le rapport

$$\frac{(A).(A')}{(B).(B')}$$

est constant, quel que soit le point P de la conique; ou bien que :

Si un quadrangle est inscrit dans une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la courbe à deux côtés opposés est dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux deux autres côtés opposés [1].

156. On peut mettre aussi sous une forme semblable le théorème corrélatif de celui de DESARGUES (143, à droite). Désignons par R, T, T_1, R_1 les sommets *qr*, *qt*, *st*, *sr* du quadrilatère circonscrit *qrst* (*fig.* 113); par P, P' les intersections des tangentes *pp'* avec le côté *q*; par P_1, P'_1 celles des mêmes tangentes avec le côté opposé *s*. En vertu du théorème 113, II, les rapports anharmoniques (RTPP'), $(R_1T_1P_1P'_1)$ sont égaux, et l'on a

$$\frac{RP}{TP} : \frac{RP'}{TP'} = \frac{R_1P_1}{T_1P_1} : \frac{R_1P'_1}{T_1P'_1},$$

ou

$$\frac{RP.T_1P_1}{TP.R_1P_1} = \frac{RP'.T_1P'_1}{TP'.R_1P'_1}.$$

---

[1] Cette proposition a été nommée *théorème de Pappus* par M. CHASLES, parce qu'elle répond au célèbre problème : *problema ad quatuor lineas*, de cet ancien géomètre. Cfr. *Aperçu historique*, p. 37 et 338.

Mais RP : TP est égal au rapport des distances (prises dans une même direction arbitraire) des points R, T à la droite p; de même $T_1P_1 : R_1P_1$ est égal au rapport des distances des points T_1, R_1 à la même droite p. L'égalité ci-dessus exprime donc que le rapport

$$\frac{RP.T_1P_1}{TP.R_1P_1}$$

est constant, quelle que soit la tangente p; ou bien que :

Si un quadrilatère est circonscrit à une conique, le produit des distances de deux sommets opposés à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente (1).

§ XVIII. — Éléments unis et éléments doubles.

157. Supposons que l'on ait deux faisceaux projectifs de rayons, concentriques ou non; par leur centre commun ou par leurs centres O, O′ faisons passer une conique, ou un cercle qui coupe les rayons du premier faisceau en A, B, C,... et les rayons du second faisceau en A′, B′, C′,.... Projetons ces deux séries de points de deux nouveaux points O_1, O'_1 (ou d'un même point) de la conique : les deux faisceaux projetants O_1 (ABC...), O'_1 (A′B′C′...) seront (113) respectivement projectifs aux deux faisceaux donnés O (ABC...), O′ (A′B′C′...); par suite ils seront projectifs entre eux.

Les deux séries de points ABC..., A′B′C′... *sont dites projectives* (2).

I. Projetons maintenant ces deux séries (*fig.* 124) de deux de leurs points correspondants, par exemple A′, A. Les faisceaux projetants

$$A'(A, B, C,\ldots), \quad A(A', B', C',\ldots)$$

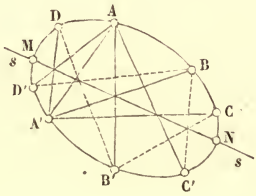
seront projectifs; ils seront aussi perspectifs à cause du rayon uni AA′. Donc (62) les couples de rayons correspondants se couperont sur une droite fixe, ou bien les points communs aux couples AB′ et A′B, AC′ et A′C, AD′ et A′D,... seront sur

(1) Chasles, *Sect. coniques*, n° 26.

(2) Bellavitis, *Saggio di Geometria derivata* (*Nuovi saggi dell'Accademia di Padova*, vol. IV, 1838, p. 270, note).

une même droite s. En joignant un point quelconque de s aux points A′, A, on aura deux droites qui couperont de nouveau

Fig. 124.



la conique en deux points correspondants des séries ABCD..., A′B′C′D′....

Si, au lieu de prendre A′ et A comme centres de projection, on prenait deux autres points correspondants, B′, B par exemple, on trouverait la même droite s. En effet, d'après le théorème de Pascal, AB′CA′BC′ étant un hexagone inscrit, le point commun à B′C, BC′ est sur la droite qui passe par le point commun à A′B, AB′ et par le point commun à A′C, AC′ (117, à droite).

II. Tout point M commun à la conique et à la droite s est un *point uni* des deux séries ABC..., A′B′C′.... En effet les droites MA′, MA rencontrent la conique en un même point M, ou bien deux points correspondants des deux séries projectives sont réunis en M. Il résulte de là que *les deux séries*

Fig. 125.

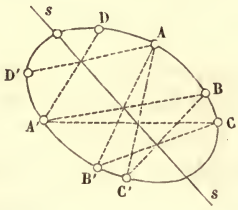
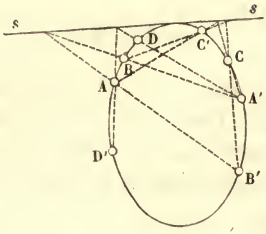


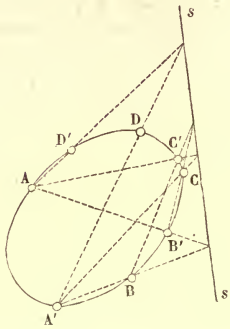
Fig. 126.



auront deux points unis, un ou aucun point uni, suivant que la droite s coupera la conique en deux points (*fig.* 124) *ou*

lui sera tangente (*fig.* 126) *ou n'aura avec elle aucun point commun* (*fig.* 127).

Fig. 127.



III. De ce qui précède il résulte que *deux séries projectives de points sur une conique sont déterminées par trois couples de points correspondants* (A, A'), (B, B'), (C, C'). Pour trouver d'autres couples de points correspondants et les points unis, s'il en existe, il suffira de construire la droite s qui passe par les trois points de concours des couples de côtés opposés de l'hexagone inscrit AB'CA'BC' (*fig.* 90, 124 et 125). Les points unis sont ceux où s coupe la conique, et deux points correspondants quelconques D, D' sont tels que les droites A'D et AD' (ou B'D et BD', ou C'D et CD') se coupent sur s [1].

158. Au lieu de *séries projectives de points* sur une conique, on peut aussi considérer des *séries projectives de tangentes*. Si o, o' sont deux droites ponctuelles projectives (distinctes ou superposées), décrivons une conique tangente à o et à o', et de chaque couple de points correspondants A et A', B et B', C et C',... menons à la conique les tangentes a et a', b et b', c et c',.... Coupons ensuite ces deux séries de tangentes abc..., $a'b'c'$... respectivement par deux autres tangentes o_1, o'_1, nous obtiendrons deux nouvelles ponctuelles respectivement projectives aux ponctuelles données (113), et par suite projectives entre elles.

On appelle *projectives* deux séries de tangentes à une conique qui jouissent de la propriété d'être coupées par une autre tangente quelconque à la même courbe suivant deux ponctuelles projectives.

---

[1] Steiner, *loc. cit.*, p. 174.

I. Supposons la première série coupée par la tangente a', et la seconde par la tangente a. Les deux ponctuelles projectives que donnent ces sections sont perspectives à cause du point uni aa'; donc les autres couples de points correspondants $a'b$ et ab', $a'c$ et ac'... sont alignés sur un point fixe S. Ce point ne change pas si l'on prend comme transversales deux autres tangentes b' et b; en effet, en vertu du théorème de BRIANCHON, $ab'ca'bc'$ étant un hexagone circonscrit, les droites qui joignent les couples de sommets opposés $a'b$ et ab', $a'c$ et ac', $b'c$ et bc' concourent en un même point (117, à gauche).

II. Si l'on peut mener des tangentes à la conique du point S, chacune d'elles sera un *rayon uni* des deux séries projectives $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$.

III. Deux séries projectives $abc\ldots, a'b'c'\ldots$ de tangentes à une conique sont déterminées par trois couples de droites correspondantes (a, a'), (b, b'), (c, c'). Pour trouver un autre couple de droites correspondantes et pour obtenir les droites unies, s'il en existe, il suffira de construire le point S commun aux diagonales qui joignent les couples de sommets opposés de l'hexagone circonscrit $ab'ca'bc'$. Les droites unies seront les tangentes menées par S; et deux droites correspondantes quelconques dd' seront telles que les points $a'd$, ad' (ou $b'd$ et bd', ou $c'd$ et cd') soient en ligne droite avec S.

IV. On dit qu'une série de points A, B, C,... d'une conique et une série de tangentes a, b, c,... de la même courbe sont projectives, si le faisceau des rayons qui projettent ABC... d'un point quelconque de la conique est projectif à la ponctuelle que les droites a, b, c,... marquent sur une tangente quelconque de la même conique.

Une série de points A, B, C,... ou de tangentes a, b, c,... d'une conique est dite *projective* à une ponctuelle ou à un faisceau, si cette ponctuelle ou ce faisceau est projectif au faisceau des rayons qui projettent ABC... d'un point quelconque de la conique, ou à la ponctuelle marquée par les droites a, b, c,... sur une tangente quelconque de la même conique.

V. Ces définitions admises, comprenons sous la dénomination de *forme de première espèce,* non-seulement les ponctuelles et les faisceaux, mais aussi les séries de points ou de tangentes d'une conique [1]; nous pourrons alors énoncer la proposition générale : *Deux formes de première espèce projectives à une troisième* (de même espèce) *sont projectives entre elles* (*voir* n° 35).

---

[1] L'introduction de ces nouvelles formes de première espèce permet d'ajouter deux opérations à celles de couper par une droite et de projeter au moyen de rayons issus d'un point : elles consistent à couper un faisceau de rayons par une conique passant par le centre du faisceau et à projeter une droite ponctuelle au moyen des tangentes à une conique tangente à la ponctuelle.

VI. Il résulte de ces mêmes définitions que le théorème du n° 113, III, peut s'énoncer de la manière suivante :

Une série quelconque de tangentes à une conique est projective à la série des points de contact.

VII. Soient donc ABC..., A′B′C′... deux séries projectives de points de la conique, et $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$ les tangentes en ces points. Les séries $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$ de tangentes sont respectivement projectives aux séries des points de contact ABC..., A′B′C′...; elles sont donc projectives entre elles. Soient s la droite sur laquelle se coupent les couples de droites analogues à AB′ et A′B, AC′ et A′C, BC′ et B′C,..., et S le point sur lequel sont alignés les couples de points analogues à ab' et $a'b$, ac' et $a'c$, bc' et $b'c$,.... Si s coupe la conique en deux points M, N, ces points seront des points unis des séries ABC..., A′B′C′...; les tangentes m, n en M, N seront, par suite, les rayons unis des séries $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$; donc les droites m, n concourront en S.

VIII. Il résulte de ce qui précède que l'on peut toujours substituer à la considération d'une série de tangentes celle des points de contact, et réciproquement.

159. Au lieu de considérer deux faisceaux projectifs quelconques, comme au n° **157**, considérons une involution de rayons issus d'un point O, et supposons ces rayons coupés par une conique, décrite par O, aux couples de points AA′, BB′, CC′,.... Projetons ces points d'un autre point O_1 quelconque de la conique; comme, par hypothèse (n^os^ **93** et **94**), les faisceaux O (A.A′.B.C...), O (A′.A.B′.C′...) sont projectifs, les faisceaux O_1 (A.A′.B.C...), O_1 (A′.A.B′.C′...) le seront aussi (**113**); par suite, les rayons issus de O_1 forment aussi des couples en involution. On dit, dans ce cas, que *les deux séries projectives de points* ABC..., A′B′C′... *de la conique constituent une involution,* ou que : *on a sur la conique une involution formée par les couples de points conjugués* AA′, BB′, CC′,... [1].

I. De la même manière, si l'on a une involution de points sur une droite o et si l'on mène par les couples de points conjugués les couples de tangentes aa', bb', cc',... à une conique tangente à o, ces tangentes aa', bb',... seront coupées par une autre tangente quelconque à la même co-

---

[1] Staudt, *Beiträge*, n°s 70 et suiv.

nique suivant des points en involution ; on dira alors que aa', bb', cc',... est *une involution de tangentes à la conique* (*voir* n° 158).

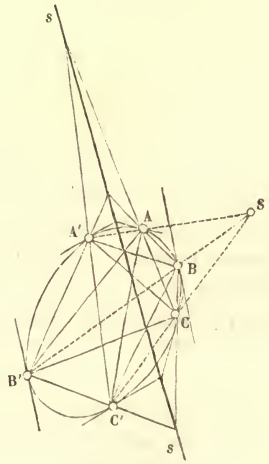
II. Si plusieurs couples de tangentes aa', bb', cc',... à une conique forment une involution, leurs points de contact AA′, BB′, CC′,... seront en involution et réciproquement (158, VI).

160. Des six points arbitraires A, B, C, A′, B′, C′ considérés au n° 157, supposons que l'on prenne C′ infiniment voisin de A, et C infiniment voisin de A′. Alors les séries projectives (ABA′...), (A′B′A...) forment l'involution (AA′.BB′...) et l'hexagone inscrit devient la figure formée par le quadrangle inscrit AB′A′B et par les tangentes aux sommets opposés A, A′ (*fig.* 106, 128). Donc :

Deux couples de points (AA′), (BB′) *d'une conique déterminent une involution sur cette courbe.*

I. Pour trouver d'autres points conjugués et les points doubles, il suffit de construire la droite s qui joint le point commun à AB′, A′B au point commun à AB, A′B′, c'est-à-dire la

Fig. 128.



droite qui joint les points de rencontre des couples de côtés opposés du quadrangle inscrit AB′A′B. Les points communs à s et à la conique sont les points doubles. Deux points con-

jugués C, C′ sont tels que les droites AC, A′C′ (ou AC′, A′C, ou BC, B′C′, ou B′C, BC′) se coupent sur s.

II. Les tangentes en deux points conjugués, comme AA′, BB′,... se coupent aussi toujours sur la droite s (129).

III. Comme les couples de droites BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′ se coupent en trois points d'une même droite s, les triangles [1] ABC, A′B′C′ sont homologiques (15); donc les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point S. Les droites AA′, BB′ suffisent pour déterminer ce point; donc :

Deux points conjugués quelconques de l'involution sont alignés sur un point fixe S.

Ou autrement :

Toute droite passant par S *et coupant la conique donne deux points conjugués de l'involution.*

IV. Nous avons vu que, si s a deux points M, N communs avec la conique, ces points sont les points doubles de l'involution. Donc les tangentes en M, N concourent en S.

V. Réciproquement les couples de points où une conique est coupée par les rayons d'un faisceau dont le centre S n'est pas un point de la courbe forment une involution. En effet, si (AA′), (BB′) sont les points d'intersection de la courbe et de deux rayons, ces deux couples AA′, BB′ déterminent une involution dans laquelle deux points correspondants sont toujours en ligne droite avec un point fixe, c'est-à-dire avec S. Si l'involution a des points doubles, ces points sont les intersections de la conique avec la droite s qui renferme le point commun à AB, A′B′ et le point commun à AB′, A′B.

VI. Si l'on mène des différents points d'une droite s les couples de tangentes aa', bb', cc',... à la conique, ces droites forment une involution. En effet, soient AA′, BB′, CC′,... les points de contact des droites aa', bb', cc', et S le point où concourent les cordes AA′, BB′: dans l'involution déterminée par les couples AA′, BB′ deux autres points conjugués quelconques seront alignés sur S. Le point C et son conjugué sont donc sur une droite passant par S, et les tangentes en ces points doivent concourir

---

[1] Les triangles A′BC et AB′C′, AB′C et A′BC′, ABC′ et A′B′C sont aussi homologiques.

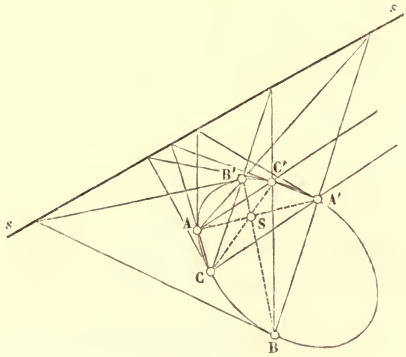
sur la droite qui passe par les intersections de aa', bb', c'est-à-dire sur s; donc le point conjugué à C est C'. Cela revient à dire que AA', BB', CC' sont des couples de points en involution, et que, par suite, aa', bb', cc' sont des couples de tangentes en involution (159, II).

VII. Si M, N sont les points doubles d'une involution AA', BB',... de points d'une conique, nous avons vu que AB, A'B', MN sont trois droites qui concourent en un point (il en est de même pour A'B, AB', MN). Donc, en vertu du théorème du n° 160, V, nous concluons que :

Si AA', BB' *sont deux couples d'éléments conjugués et* MN *les éléments doubles d'une involution,* MN, AB, A'B' (ainsi que MN, AB', A'B) *seront trois couples d'éléments conjugués d'une nouvelle involution.*

VIII. La droite s coupe la conique si (188) le point S est extérieur (*fig.* 128), c'est-à-dire si des deux couples AA', BB' l'un est tout intérieur ou tout extérieur à l'autre; si l'un des couples est séparé par l'autre (empiète sur l'autre), le point S est intérieur et la droite s ne rencontre pas la conique (*fig.* 129). Nous retrouvons donc de nouveau la propriété (98) :

Fig. 129.



Une involution a deux éléments doubles si, de deux couples d'éléments conjugués, l'un est tout intérieur ou tout extérieur à l'autre. Une involution n'a pas d'éléments doubles si, de deux couples d'éléments conjugués, l'un empiète sur l'autre.

Il ne peut jamais arriver qu'une involution proprement dite ait un seul élément double. En effet, si s est tangente à la conique, S est le point de contact, et dans chaque couple de

points conjugués, il y en a un qui coïncide toujours avec S (*voir* n° 96).

161. Si (MNAB...), (MNA′B′...) sont deux séries projectives de points sur une conique, les points unis seront M et N et la droite MN contiendra le point commun à AB′, A′B (157). Supposons maintenant que, si B′ devient infiniment voisin de A, B et A′ deviennent aussi infiniment voisins, de manière que les positions limites des droites AB′, A′B soient les tangentes en A, A′ (*fig.* 130); mais si MNAA′, MNA′A sont des groupes correspondants de deux séries projectives, cela veut dire que, si l'on projette ces points d'un point quelconque O de la conique, les deux groupes de rayons projetants *mnaa′*, *mna′a* sont projectifs; donc le groupe *mnaa′* est harmonique (65). Nous retrouvons donc le théorème du n° 152, II (à droite):

Si quatre points MNAA′ *d'une conique sont harmoniques, les tangentes en deux points conjugués,* A *et* A′ *par exemple, concourent sur la droite qui joint les deux autres.*

Ou (152, II, à gauche) :

Si quatre tangentes d'une conique sont harmoniques, deux tangentes conjuguées se coupent sur la droite qui joint les points de contact des deux autres.

Fig. 130.

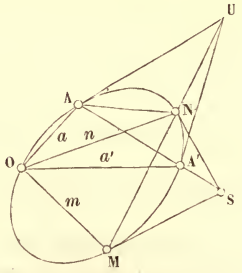
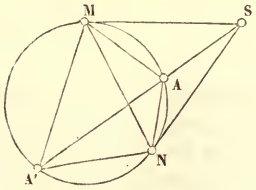


Fig. 131.



Il résulte de là que, si par le point S commun aux tangentes en M, N on mène des droites qui coupent la conique en (A, A′), (B, B′), (C, C′),..., tous ces couples de points seront séparés harmoniquement par MN. Donc les couples de tan-

gentes en A et A′, B et B′, C et C′,... concourront sur la droite MN.

Ou, en d'autres termes :

Si d'un point on mène deux tangentes et une sécante à une conique, les deux points de contact et les deux points d'intersection forment un groupe harmonique.

Les points (AA′), (BB′), (CC′),... forment une involution, dont les points doubles sont MN (160, III, IV). Nous arrivons donc de nouveau à cette propriété que, si une involution a deux éléments doubles, ils sont séparés harmoniquement par deux éléments conjugués quelconques (96).

Supposons que la conique soit un cercle (*fig.* 131). Les triangles semblables SAM, SMA′ donnent

$$AM : MA' = SM : SA'$$

et les triangles semblables SAN, SNA′

$$AN : NA' = SN : SA';$$

mais SM = SN : donc

$$\frac{AM}{AN} = \frac{A'M}{A'N},$$

ou

$$AM.A'N = AN.A'M.$$

Dans le quadrangle AMA′N inscrit au cercle, nous avons, d'après le théorème de Ptolémée [1],

$$AA'.MN = AM.A'N + AN.A'M;$$

donc on a, pour le quadrangle formé par quatre points harmoniques,

$$\tfrac{1}{2}AA'.MN = AM.A'N = AN.A'M.$$

162. Les propriétés exposées aux nos 157 et suivants fournissent immédiatement la solution du problème.

Construire les éléments unis de deux formes projectives superposées et les éléments doubles d'une involution.

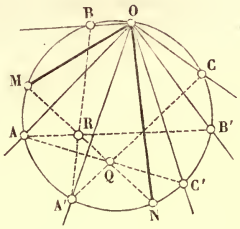
I. Soit O le centre commun de deux faisceaux projectifs, déterminés par trois couples de rayons correspondants (*fig.* 132). Décrivons un cercle qui passe par le point O, il coupera les trois couples de rayons donnés en (A, A′), (B, B′), (C′C′). Soient R le point commun aux droites AB′,

---

[1] Baltzer, *Planimétrie*, p. 192.

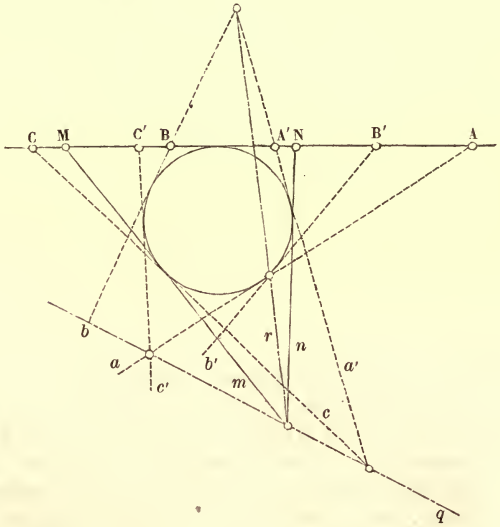
A′B, et Q le point commun à AC′, A′C. Si la droite QR coupe le cercle en deux points M, N, OM, ON seront les rayons unis demandés.

Fig. 132.



II. Soient AA′, BB′, CC′ trois couples de points correspondants de deux ponctuelles projectives superposées (*fig.* 133) sur une droite *o*; proposons-nous de construire les points unis.

Fig. 133.

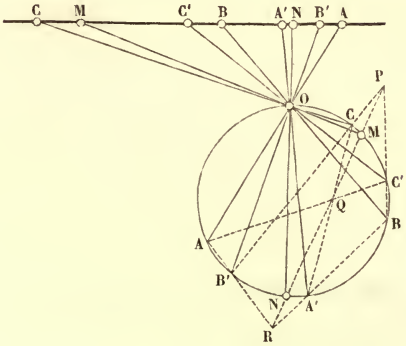


Qu'on décrive un cercle tangent à la droite *o*, et qu'on lui mène, par les points donnés, les tangentes *aa′*, *bb′*, *cc′*; soient *r* la droite qui joint les points *ab′*, *a′b*, et *q* la droite qui joint les points *ac′*, *a′c*. Si le point *qr* est extérieur au cercle, et si *m*, *n* sont les tangentes menées de ce point

au cercle, les points *om*, *on* seront les points unis des ponctuelles données.

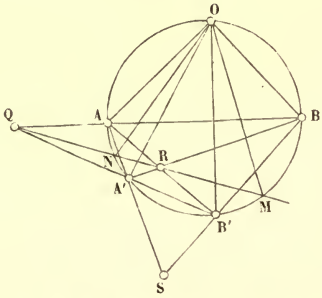
Autrement (*fig.* 133 *bis*) :

Fig. 133 *bis*.



D'un point O d'une circonférence tracée arbitrairement, projetons les points donnés en $A_1 A'_1$, $B_1 B'_1$, $C_1 C'_1$ sur la circonférence [1]. Soient R

Fig. 134.



le point commun à $A_1 B'_1$, $A'_1 B_1$; Q le point commun à $A_1 C'_1$, $A'_1 C_1$ (ou bien P le point commun à $B_1 C'_1$, $B'_1 C_1$). Si la droite PQR coupe le cercle en deux points M_1, N_1 et si l'on projette du point O les points M_1, N_1 en MN sur la droite donnée, M, N seront les points unis demandés [2].

III. Si les deux faisceaux 162, I sont en involution, deux couples de rayons conjugués suffisent pour les déterminer (*fig.* 134). Coupons les rayons donnés par un cercle décrit par O aux points (A, A'), (B, B') ; soient R

---

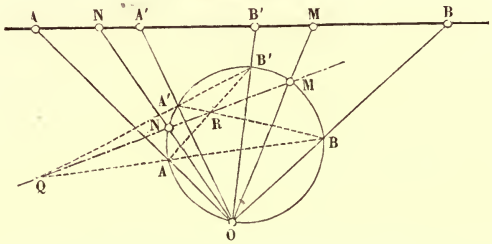
[1] Dans la figure, les points de la droite donnée et leurs projections faites de O sur la corde sont désignés par les mêmes lettres.

[2] Steiner, *loc. cit.*, p. 68 et 174.

le point commun à AB′, A′B ; Q le point commun à AB, A′B′. Si la droite QR coupe le cercle en deux points M, N, les rayons doubles de l'involution seront OM, ON. La droite QR ne coupe pas le cercle quand le point S, commun à AA′, BB′, est intérieur au cercle.

IV. Soient AA′, BB′ deux couples de points conjugués d'une involution de points en ligne droite, dont on demande les points doubles (*fig.* 135).

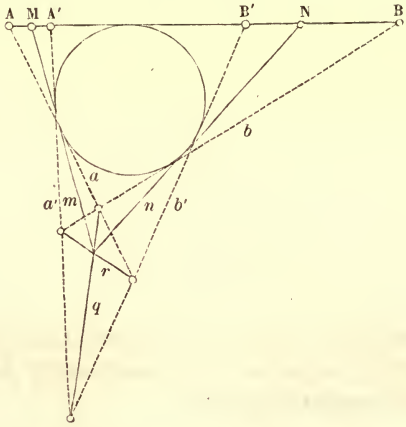
Fig. 135.



Du point O d'une circonférence tracée arbitrairement projetons les points donnés en $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ sur la circonférence. Soient R le point commun à $A_1B'_1$, A'_1B_2 ; Q le point commun à A_1B_1, $A'_1B'_1$. Si la droite QR couple le cercle en M_1, N_1 et si du point O on projette M_1N_1 en MN sur la droite donnée, M, N seront les points doubles demandés.

Autrement : décrivons un cercle tangent à la droite AB... (*fig.* 135 *bis*),

Fig. 135 *bis*.

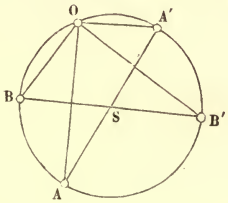


et menons par AA′, BB′ les tangentes aa', bb' à ce cercle. Soient q la droite qui joint les points ab, $a'b'$, et r la droite qui joint les points ab', $a'b$.

Les tangentes m, n, menées par le point qr, couperont AB... aux points doubles demandés.

163. Dans le cas (162, III) de l'involution, si le point S commun aux droites AA′, BB′,... est le centre du cercle (*fig.* 136), c'est-à-dire si AA′, BB′,... sont autant de diamètres

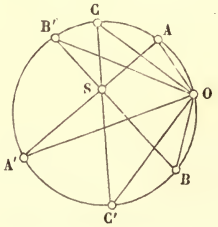
Fig. 136.



du cercle, chaque rayon OA, OB,... sera perpendiculaire à son conjugué; cela veut dire que l'involution sera formée dans ce cas par tous les angles droits qui ont leur sommet en O.

Mais si S n'est pas le centre du cercle, il ne passera qu'un seul diamètre par ce point, de manière qu'en nommant C, C′ les points d'intersection du cercle avec ce diamètre, les rayons OC, OC′ seront perpendiculaires entre eux et ce seront les seuls rayons conjugués qui jouissent de cette propriété (*fig.* 137). Ou bien :

Fig. 137.



Une involution de rayons ou est entièrement formée d'angles droits, ou ne renferme qu'un seul angle droit dont les côtés soient des rayons conjugués.

164. Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant : Supposons que l'on ait deux involutions distinctes de rayons

qui concourent tous au point O, et qu'un cercle décrit par O coupe les rayons conjugués de la première involution aux couples de points (AA′.BB′...) et ceux de la seconde en (GG′.HH′...). Soient S le point commun à AA′, BB′,... et T le point commun à GG′, HH′,.... Si la droite ST coupe le cercle en deux points E, E′ ces points seront conjugués dans les deux involutions, car ils sont alignés sur S aussi bien que sur T. Cherchons maintenant dans quels cas la droite ST coupera le cercle.

Cela arrivera d'abord si l'un des points S, T au moins est dans l'intérieur du cercle (160, VIII), c'est-à-dire si une des involutions au moins n'a pas d'éléments doubles (*fig.* 138 et 139).

Si les points S, T sont tous les deux extérieurs au cercle,

Fig. 138.

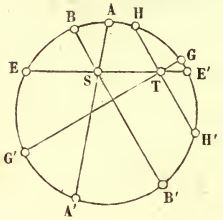
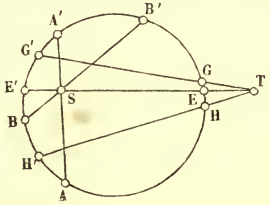


Fig. 139.

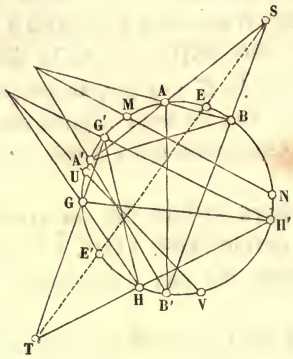


c'est-à-dire si les deux involutions possèdent des éléments doubles et si ces éléments sont OM, ON pour la première et OU, OV pour la seconde, les rayons OE, OE′ devront séparer harmoniquement le couple OM, ON aussi bien que le couple OU, OV; mais (55), pour qu'il existe un couple d'éléments OE, OE′ qui forme un groupe harmonique avec chacun des couples OM et ON, OU et OV, il est nécessaire et suffisant que ces deux couples n'empiètent pas l'un sur l'autre; donc :

Deux involutions superposées (ou contenues dans une même forme de première espèce) *ont toujours en commun un couple d'éléments conjugués, excepté dans le cas où les deux involutions ont des éléments doubles et où les éléments doubles de l'une sont séparés par les éléments doubles de l'autre.*

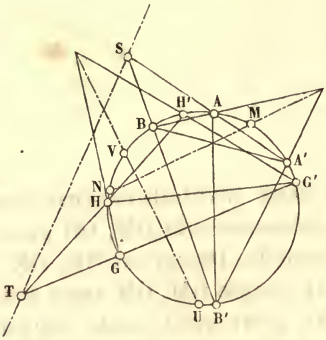
La *fig.* 140 (de même que les *fig.* 138 et 139) nous présente les cas de

Fig. 140.



deux involutions ayant en commun un couple EE' d'éléments conjugués. La *fig.* 141, au contraire, donne le cas où ce couple commun n'existe pas.

Fig. 141.



I. Le problème qui précède, c'est-à-dire la recherche du couple d'éléments conjugués commun à deux involutions superposées, rentre dans celui qui consiste à déterminer (dans une ponctuelle, dans un faisceau ou sur une conique) deux éléments qui forment un système harmonique avec l'un et avec l'autre de deux couples donnés (55).

Qu'il s'agisse, par exemple, de points en ligne droite; projetons les couples donnés d'un point O sur un cercle passant par ce point. Soient MN, UV ces projections (*fig.* 140). Les tangentes en MN au cercle concourront en S, les tangentes en UV, en T. Si le couple MN n'est pas sé-

paré par le couple UV, ST coupera le cercle en deux points EE′, et ces points sont les points demandés.

II. Les points doubles de l'involution déterminée par les couples AA′, BB′ forment le couple d'éléments conjugués commun à deux autres involutions : l'une déterminée par les couples AB, A′B′, l'autre par les couples AB′, A′B (160, VII).

On déduit de là une manière de construire les points doubles de l'involution déterminée par les couples AA′, BB′ de points en ligne droite. Prenons un point G quelconque en dehors de la ligne et décrivons les cercles GAB, GA′B′, ils auront un autre point commun H. Soit aussi K la seconde intersection des cercles GAB′, GA′B. Tout cercle décrit par les points G, H rencontre la droite donnée en deux points conjugués de l'involution AB, A′B′ (98) ; de même, tout cercle décrit par GK donne deux points conjugués de l'involution AB′, A′B. Donc, si l'on décrit le cercle GHK et s'il rencontre la droite donnée, les deux points d'intersection seront les éléments doubles de l'involution AA′.BB′ ([1]).

165. Il résulte de ce qui précède que la recherche des points unis de deux séries projectives de points ABC..., A′B′C′... d'une conique (et, par suite, des éléments unis de deux formes projectives superposées qu e conques) se réduit à la construction de la droite s sur laquelle se coupent les couples de droites AB′ et A′B, AC′ et A′C, BC′ et B′C,.... De même aussi, la recherche des points doubles d'une involution AA′, BB′,... se réduit à la construction de la droite s, sur laquelle se coupent les couples de droitesAB et A′B′, AB′ et A′B,... ou les couples de tangentes en A et A′, B et B′,....

Réciproquement, si l'on donne une droite quelconque s (non tangente à la conique), une involution de points sur la conique se trouve déterminée ; car il suffit de mener par les différents points de s les couples de tangentes à la conique et les points de contact formeront les couples de points conjugués.

Au contraire, pour que deux séries projectives ABC..., A′B′C′... soient déterminées, il faut donner, outre la droite s, un couple de points correspondants AA′ ; chaque point de s joint à A et à A′ donne deux droites qui rencontrent la conique en deux points correspondants B′, B.

Deux séries projectives de points déterminent une involution ; les deux séries donnent, en effet, la droite s qui détermine l'involution. Si les deux séries ont deux points unis, ces points sont aussi les points doubles de l'involution.

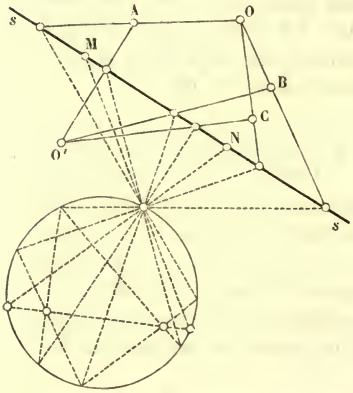
([1]) Chasles, *Géométrie supérieure*, n° 263.

§ XIX. — Problèmes du second degré.

166. *Problème.* — Étant donnés cinq points d'une conique O, O′, A, B, C, trouver les intersections de la courbe et d'une droite donnée *s*.

Solution. — De O et de O′ projetons (*fig.* 142) les autres points A, B, C de la conique; les faisceaux O (ABC...), O′ (ABC...) sont projectifs et coupent la transversale *s* en des points qui forment deux ponctuelles projectives superposées. Si M est un point uni de ces ponctuelles, M sera un point de la conique, car deux rayons correspondants des deux faisceaux se coupent en M. Donc les points communs à la conique et à la droite *s* ne sont autre chose que les points unis des deux ponctuelles projectives super-

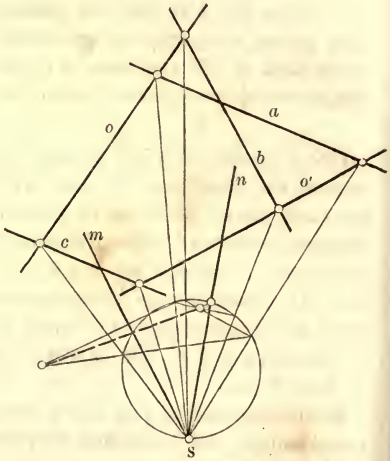
Fig. 142.



Étant données cinq tangentes *o*, *o*′, *a*, *b*, *c* d'une conique, trouver les tangentes que l'on peut mener à la conique par un point donné S.

Si l'on coupe les tangentes *a*, *b*, *c*,... par les droites *o*, *o*′ (*fig.* 143), les ponctuelles *o* (*a*, *b*, *c*,...), *o*′ (*a*, *b*, *c*,...) sont projectives, et si on les projette du centre S, on aura deux faisceaux projectifs concentriques. Si *m* est un rayon uni de ces faisceaux, *m* sera une tangente à la conique, car deux points correspondants des deux ponctuelles tombent sur cette droite. Donc les tangentes de la conique qui passent par S ne sont autre chose que les rayons unis des deux faisceaux projectifs concentriques déterminés

Fig. 143.



posées, déterminées par la rencontre de s avec les trois couples de rayons correspondants OA et O'A, OB et O'B, OC et O'C. Il peut y avoir deux points unis, ou un seul, ou aucun; la droite s peut donc couper la conique en deux points, lui être tangente en un point, ou ne pas la rencontrer du tout. Pour la construction des points unis il faudra se reporter au n° 162.

Le problème se résout de la même manière si l'on donne quatre points O, O', A, B de la conique et la tangente o en O; ou trois points O, O', A et les tangentes o, o' en O, O'. Dans le premier de ces cas, les faisceaux sont déterminés par les trois couples de rayons o et O'O, OA et O'A, OB et O'B; dans le second, par les trois couples o et O'O, OO' et o', OA et O'A.

Si l'on donne, au contraire, cinq tangentes ou quatre tangentes et un de leurs points de contact, ou trois tangentes et deux de leurs points de contact, on peut commencer par construire (134, 140, 141) les autres points de contact : alors le problème se ramène à un des cas précédents.

par les rayons qui projettent du centre S les trois couples de points correspondants oa et $o'a$, ob et $o'b$, oc et $o'c$. Il peut y avoir deux rayons unis, ou un seul, ou aucun : du point S on peut donc mener deux tangentes : ou le point S est un point de la courbe, ou par S on ne peut mener aucune tangente. Pour la construction des rayons unis il faudra se reporter au n° 162.

Le problème se résout de la même manière si l'on donne quatre tangentes o, o', a, b de la conique et le point de contact O de o; ou trois tangentes o, o', a et les points de contact O, O' de o, o'. Dans le premier cas, les ponctuelles sont déterminées par les trois couples de points O et $o'o$, oa et $o'a$, ob et $o'b$; dans le second, par les trois couples O et $o'o$, oo' et O', oa et $o'a$.

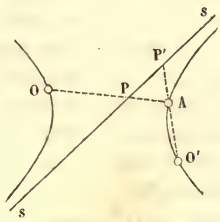
Si l'on donne, au contraire, cinq points ou quatre points et la tangente en un d'eux, ou trois points et les tangentes en deux d'entre eux, on peut commencer par construire (128, 134, 138) les tangentes aux autres points donnés : alors le problème se ramène à un des cas précédents.

167. Supposons, dans la construction du numéro précédent, à gauche, que la conique soit une hyperbole et la transversale s une asymptote (*fig.* 144); les ponctuelles projectives superposées marquées sur s par les faisceaux O(A, B, C,...), O'(A, B, C,...) auront, dans ce cas, un seul point uni et il sera à distance infinie (c'est le point de contact de l'hyperbole et de l'asymptote s); mais (77), dans deux ponctuelles projectives superposées dont les points unis se confondent en un seul à l'infini, le segment compris entre deux points correspondants quelconques a une longueur constante; donc :

Si, autour de deux points fixes O, O' *d'une hyperbole, on fait tourner*

deux rayons qui se coupent constamment sur la courbe, le segment PP *intercepté par ces rayons sur une asymptote est de grandeur constante* (¹).

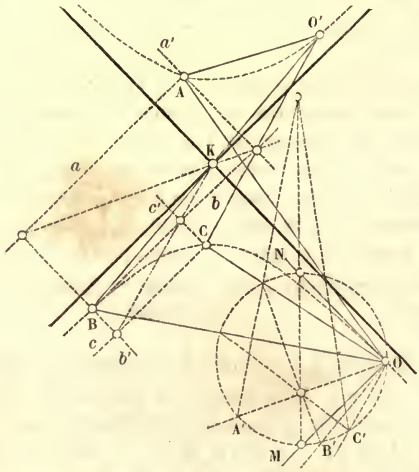
Fig. 144.



168. Si l'on suppose, dans le n° 166 à gauche, que la droite s soit à l'infini, le problème devient :

Étant donnés cinq points O, O', A, B, C d'une conique, construire les points à l'infini (*fig.* 145).

Fig. 145.



Considérons encore les faisceaux projectifs O (A, B, C,...), O' (A, B, C,...) qui marquent sur la droite s (à l'infini) deux ponctuelles projectives superposées dont les points unis sont les points demandés, et obser-

(¹) Brianchon, *loc. cit.*, p. 36.

vons que chacun de ces points unis doit être commun à la droite de l'infini s et à deux rayons correspondants des deux faisceaux : ces rayons seront donc parallèles; le problème se réduit à trouver les couples de rayons correspondants parallèles dans les deux faisceaux.

Pour le résoudre, menons par O les droites OA′, OB′, OC′, respectivement parallèles à O′A, O′B, O′C; construisons (162) les rayons unis des deux faisceaux projectifs concentriques déterminés par les couples OA et OA′, OB et OB′, OC et OC′. S'il y a deux rayons unis OM, ON, la conique déterminée par les cinq points donnés est une hyperbole dont les points à l'infini sont sur les directions OM, ON ou, ce qui revient au même, dont les asymptotes sont parallèles aux droites OM, ON.

S'il n'y a qu'un seul rayon uni OM, la conique déterminée par les cinq points donnés est une parabole dont le point à l'infini est dans la direction OM.

S'il n'y a aucun point uni, la conique déterminée par les cinq points donnés, n'ayant pas de points communs avec la droite à l'infini, est une ellipse.

Si, dans le premier cas (*fig.* 145), on veut construire les asymptotes de l'hyperbole, il suffira de considérer celle-ci comme déterminée par les deux points à l'infini et par trois autres points, A, B, C par exemple, c'est-à-dire (122) de la considérer comme engendrée par les deux faisceaux projectifs de rayons, parallèles les uns à OM, les autres à ON, et dont deux correspondants passent par A, deux autres correspondants par B, et enfin deux par C. Les rayons de ces faisceaux qui correspondent à la droite de l'infini (qui joint les centres des faisceaux) seront les asymptotes demandées.

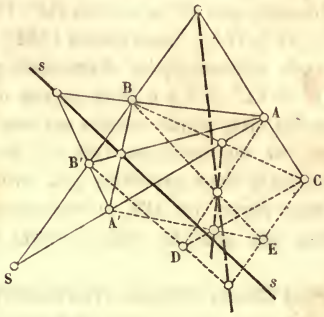
Nommons donc (*fig.* 145) a, b, c les rayons parallèles à OM, qui passent par A, B, C; a', b', c' les rayons parallèles à ON, qui passent par ces mêmes points; joignons le point ab' au point $a'b$ et le point bc' au point $b'c$. Soit K le point d'intersection ; les parallèles à ces droites OM, ON menées par le point K sont les asymptotes cherchées.

169. Le problème : « Mener par un point S les tangentes à la conique dont on donne cinq points A, B, C, D, E » peut aussi être rattaché au problème du n° 166, à gauche, en ayant recours aux propriétés de l'involution (160) que l'on obtient en coupant la conique par des transversales issues du point S.

Menons les droites SA, SB (*fig.* 146) qui couperont la conique en deux nouveaux points A′, B′, que l'on sait construire (au moyen de la règle seulement et sans tracer la courbe) en appliquant le théorème de Pascal (n° 124, à droite). Les points A′B′ sont construits, dans la figure, au moyen des hexagones ADCBEA′, BECADB′. Joignons le point commun à

AB, A′B′ au point commun à AB′, A′B : cette droite s renfermera (160) les points de contact des tangentes issues de S. La question se réduit

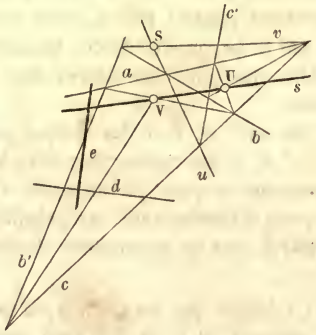
Fig. 146.



ainsi à trouver les intersections de la conique et de la droite s (n° 166, à gauche).

Nous laissons à l'élève le soin de faire la construction corrélative (*fig.* 147) pour ramener au problème du n° 166, à droite, le problème :

Fig. 147.



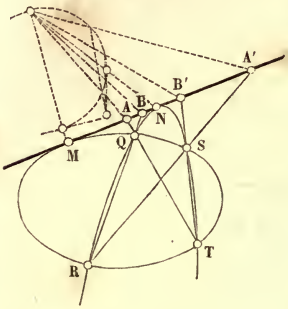
« Trouver les points communs à une droite donnée s et à la conique déterminée par cinq tangentes données ».

170. *Problème.* — Construire une conique qui passe par quatre points donnés Q, R, S, T et soit tangente à une droite donnée s (qui ne passe par aucun des points donnés).

Construire une conique tangente à quatre droites données q, r, s, t et qui passe par un point donné S (non situé sur une des droites données).

Solution. — Les côtés QT, RS, QR, ST du quadrilatère QRST coupent s en A, A′, B, B′ (*fig.* 148); construisons les points doubles de

Fig. 148.



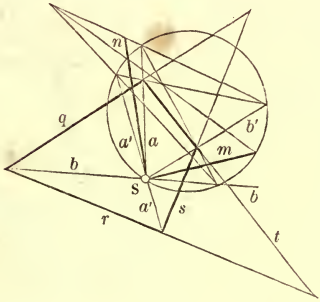
l'involution déterminée par les couples AA′, BB′.

S'il y a deux points doubles MN, chacun d'eux sera (n° 145, à gauche) un point de contact de s avec une des coniques circonscrites au quadrangle QRST; le problème sera donc résolu par chacune des coniques QRSTM, QRSTN, que l'on pourra construire, toutes les deux, par points en appliquant le théorème de Pascal (n° 124, à droite).

S'il n'y a pas de points doubles, il n'y a pas, non plus, de conique satisfaisant aux conditions proposées.

Solution. — Du centre S projetons les points qt, rs, qr, st du quadrilatère $qrst$, au moyen des rayons a, a', b, b' (*fig.* 149), et construi-

Fig. 149.



sons les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples aa', bb'.

S'il y a deux rayons doubles m, n, chacun d'eux (n° 145, à droite) sera tangent en S à une conique inscrite au quadrilatère $qrst$; le problème sera donc résolu par les deux coniques $qrstm$, $qrstn$, que l'on pourra construire, toutes les deux, par tangentes en appliquant le théorème de Brianchon (n° 124, à gauche).

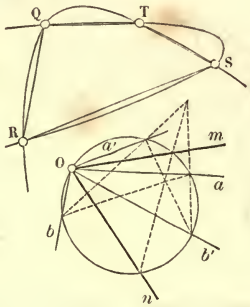
S'il n'y a pas de rayons doubles, il n'existe aucune conique satisfaisant aux conditions proposées.

I. Si l'on suppose, à gauche, que la droite s soit à distance infinie, le problème devient : Construire une parabole qui passe par quatre points Q, R, S, T. D'un centre quelconque O (*fig.* 150) menons les rayons a, a', b, b' respectivement parallèles aux droites QT, RS, QR, ST et construisons les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples aa', bb'. S'il y a deux rayons doubles, chacun d'eux donnera la direction sur laquelle se trouve le point à l'infini d'une parabole qui passe par les

quatre points donnés; le problème sera ainsi ramené au dernier problème du n° 128.

Ainsi, par quatre points donnés, il passe deux paraboles ou il n'en passe aucune; dans le premier cas, les autres coniques circonscrites sont des ellipses et des hyperboles; dans le second cas, il n'y a que des hyperboles. Le premier cas se présente quand chacun des quatre points donnés est extérieur au triangle formé par les trois autres; on a le second cas quand un des quatre points est intérieur au triangle formé par les trois autres.

Fig. 150.



II. Si, dans l'énoncé de droite, une des droites *qrst* est à l'infini, le problème devient :

Construire une parabole tangente à trois droites données et qui passe par un point donné.

171. *Problème.* — Construire une conique qui passe par trois points donnés P, P', P'' et qui soit tangente à deux droites données q, s (ne passant pas par un des points donnés).

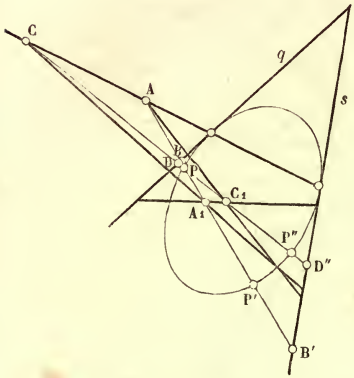
La solution est fondée sur le théorème du n° 149, à gauche. Imaginons que la conique et le couple de tangentes q, s soient coupés par la transversale PP' aux couples de points PP', BB' (*fig.* 151). En vertu de ce théorème, si A, A_1 sont les points doubles de l'involution dé-

Construire une conique tangente à trois droites données p, p', p'' et qui passe par deux points donnés Q, S (dont aucun n'est sur une des droites données).

La solution est fondée sur le théorème du n° 149, à droite. Imaginons que l'on ait mené du point pp' les tangentes p, p' à la conique et les rayons b, b' aux points Q, S (*fig.* 152). En vertu de ce théorème, si aa_1 sont les rayons doubles de l'involution déterminée par les deux

terminée par ces deux couples de points, la corde de contact de la conique et des tangentes qs passera par un de ces points. Faisons

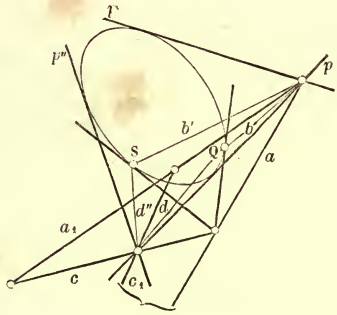
Fig. 151.



le même raisonnement pour la transversale PP″, qui coupe q et s en D, D″, c'est-à-dire construisons aussi les points doubles C, C_1 de l'involution déterminée par les couples PP″, DD″, la corde de contact passera par C ou par C_1. Le problème admet donc quatre solutions; c'est-à-dire que, si les deux involutions (PP′, BB′), (PP″, DD″) admettent les points doubles (A, A_1), (C, C_1), il y a quatre coniques qui satisfont aux conditions données; et les cordes de contact de ces courbes avec les tangentes q, s sont AC, A_1C, AC_1, A_1C_1. De chacune de ces coniques, de la première par exemple, on connaît cinq points P, P′, P″ et les intersections de AC avec q et s; on pourra donc les construire par points au moyen du théorème de Pascal (n° 124, à droite).

couples pp', bb', le point de concours des tangentes à la conique aux points Q, S se trouvera sur un de ces rayons. Faisons le même rai-

Fig. 152.

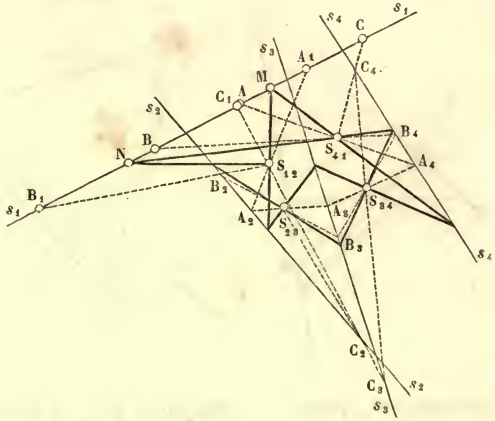


sonnement pour le point pp'', d'où nous tirerons les rayons d, d'' aux points Q, S, c'est-à-dire construisons aussi les rayons doubles c, c_1 de l'involution déterminée par les couples pp'', dd''; le point de concours ci-dessus tombera en c ou en c_1. Le problème admet donc quatre solutions; c'est-à-dire que, si les deux involutions (pp', bb'), (pp'', dd'') admettent les rayons doubles (a, a_1), (c, c_1); il y a quatre coniques qui satisfont aux conditions données; et pour ces courbes les points de concours des tangentes en Q, S sont ac, a_1c, ac_1, a_1c_1. De chacune de ces coniques, de la première, par exemple, on connaît cinq tangentes p, p', p'' et les droites qui joignent ac à Q et S; on pourra donc les construire par tangentes au moyen du théorème de Brianchon (n° 124, à gauche).

172. *Problème.* — Construire un polygone dont les sommets tombent sur des droites données et dont les côtés passent par des points donnés [1].

Solution. — Pour fixer les idées (*fig.* 153), supposons qu'il s'agisse de construire un quadrilatère simple, dont les sommets, que nous nomme-

Fig. 153.



rons 1, 2, 3, 4, tombent respectivement sur les droites données s_1, s_2, s_3, s_4 et dont les côtés 12, 23, 34, 41 passent par les points donnés S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}. Du centre S_{12} projetons les points A_1, B_1, C_1,... de s_1 sur s_2 en A_2, B_2, C_2...; puis du centre S_{23} projetons la ponctuelle $A_2B_2C_2$... sur s_3 en $A_3B_3C_3$..., puis de S_{34} projetons $A_3B_3C_3$... en $A_4B_4C_4$... sur s_4 ; et enfin de S_{41} projetons $A_4B_4C_4$... en ABC... sur s_1. De cette manière, les points S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41} sont les centres de quatre faisceaux projectifs, car le premier est perspectif au deuxième (section commune s_2), le deuxième au troisième (section commune s_3), le troisième au quatrième (section commune s_4). Il résulte de là (**114**) que le lieu du point commun à deux rayons correspondants (comme A_1A_2 et A_4A) du premier et du quatrième faisceau, ou, en d'autres termes, le lieu du premier sommet du quadrilatère variable, dont le deuxième, le troisième et le quatrième sommet (A_2, A_3, A_4) se meuvent sur trois droites données (s_2, s_3, s_4) et dont les côtés (A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A) passent par quatre points donnés (S_1, S_2, S_3, S_4) est une conique [2].

---

[1] Poncelet, *loc. cit.*, p. 345.

[2] Ce théorème (si un polygone simple se déforme de manière que ses côtés passent par des points donnés et que ses sommets, moins un, parcourent des droites données, le dernier sommet parcourt une conique) est dû à Maclaurin (*Transactions* de Londres, 1735, ou *Aperçu historique*, p. 150).

Cette conique passe par les points S_{12}, S_{41}, centres des faisceaux qui l'engendrent; il suffira donc, pour la déterminer, de trois autres de ses points, c'est-à-dire des intersections de trois couples de rayons correspondants A_1A_2 et A_4A, B_1B_2 et B_4B, C_1C_2 et C_4C. Il n'y aura plus alors qu'à construire (166) les intersections de la droite s_1 avec la conique déterminée par ces cinq points, et chacune d'elles pourra être prise comme le sommet 1 du quadrilatère cherché.

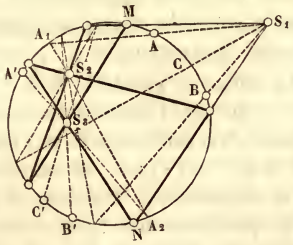
La même construction peut être envisagée sous cet autre aspect. Les lignes brisées $A_1A_2A_3A_4A$, $B_1B_2B_3B_4B$, $C_1C_2C_3C_4C$ peuvent être regardées comme des essais faits pour construire le quadrilatère cherché; ces essais donnent des polygones non fermés, car le point A ne se confond pas avec A_1, ni B avec B_1, ni C avec C_1. Ces essais et tous les autres semblables que l'on peut imaginer, mais qu'il n'est pas nécessaire d'exécuter, donnent sur la droite s_1 deux ponctuelles $A_1B_1C_1\ldots$, ABC... (décrites l'une par l'origine, l'autre par le dernier sommet de la ligne brisée ou polygone ouvert). Ces deux ponctuelles sont projectives, parce que la seconde se déduit de la première au moyen de projections à partir des centres S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41} et de sections par les transversales s_2, s_3, s_4, s_1. Chacun des points unis de ces ponctuelles résout le problème; car, si l'on y place l'origine de la ligne brisée, son extrémité y tombera aussi et le polygone sera fermé.

Dans ce problème et dans les suivants, la méthode reste la même, quel que soit le nombre des côtés du polygone à construire.

173. *Problème.* — Inscrire dans une conique donnée (¹) un polygone dont les côtés passent par des points donnés.

Solution. — Supposons qu'il s'agisse d'inscrire un triangle dont les côtés passent respectivement par trois points donnés S_1, S_2, S_3 (*fig.* 154).

Fig. 154.



Faisons trois essais, c'est-à-dire du centre S_1 projetons trois points quel-

(¹) Entièrement décrite ou déterminée par cinq points donnés.

conques A, B, C de la courbe en A_1, B_1, C_1 sur la même courbe, puis A_1, B_1, C_1 du centre S_2 en A_2, B_2, C_2, puis A_2, B_2, C_2 du centre S_3 en A′, B′, C′ (toujours sur la même courbe). Comme le point d'arrivée A′ ou B′ ou C′ ne coïncide pas avec le point de départ correspondant A ou B ou C, au lieu d'un triangle inscrit, tel qu'il est demandé dans l'énoncé du problème, nous aurons un polygone ouvert AA_1A_2A', BB_1B_2B', CC_1C_2C'; mais les projections successives faites des centres S_1, S_2, S_3 déduisent de la série de points A, B, C,... les séries $A_1B_1C_1$..., $A_2B_2C_2$..., A′B′C′...; par suite (158, 160) la série ABC... des points de départ et la série des points d'arrivée A′, B′, C′,... sont projectives (157). Le problème serait résolu si le point d'arrivée se confondait avec le point de départ; donc, si les deux séries projectives ABC..., A′B′C′... ont des points unis, chacun d'eux pourra servir de premier sommet à un triangle satisfaisant aux conditions proposées. Il faut donc trouver (157, II) la droite sur laquelle se coupent les couples de côtés opposés de l'hexagone inscrit AB′CA′BC′, et construire les intersections M, N de cette droite et de la conique (166); chacune d'elles donnera une solution au problème [1].

174. Une méthode analogue permet de résoudre le problème corrélatif:

Circonscrire à une conique donnée [2] *un polygone dont les sommets tombent sur des droites données.*

Supposons qu'il s'agisse de circonscrire à la conique un triangle dont les sommets soient respectivement sur les droites s_1, s_2, s_3 (*fig.* 155). Traçons la tangente a en un point quelconque A de la conique, du point où elle coupe s_1, menons une autre tangente a_1 (point de contact A_1); du point où a_1 rencontre s_2, menons la seconde tangente a_2 (point de contact A_2); et enfin du point où a_2 coupe s_3 tirons de nouveau la tangente a' et soit A′ son point de contact. Le problème serait résolu si le point A′ coïncidait avec A, c'est-à-dire si les tangentes a, a' se confondaient. Imaginons que nous ayons fait d'autres essais semblables en prenant pour points de départ les points quelconques B, C,... de la conique, nous aurons successivement les séries de points A, B, C,...; A_1, B_1, C_1,...; A_2, B_2, C_2,...; A′, B′, C′,..., qui sont toutes projectives entre elles. En effet, la première et la seconde série sont projectives (160), parce que les tangentes en A et A_1, B et B_1, C et C_1,... se coupent toujours sur s_1; de même la deuxième et la troisième, la troisième et la quatrième, et par suite la première et la quatrième sont projectives entre elles pour la même raison (158). Et comme le problème serait résolu si A et A′, ou B

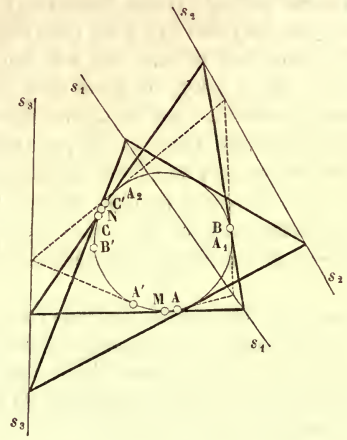
---

[1] Poncelet, *loc. cit.*, p. 352.

[2] Entièrement décrite ou déterminée par cinq tangentes données.

et B′,... se confondaient, chacun des points unis des séries projectives ABC..., A′B′C′... pourra servir de point de contact au premier côté

Fig. 155.



d'un triangle satisfaisant aux conditions demandées. Il suffira donc (157) de faire trois essais, c'est-à-dire de déduire de trois points quelconques A, B, C, pris sur la conique, les points correspondants A′, B′, C′, et de construire les points M, N communs à la conique et à la droite qui renferme les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone inscrit AB′CA′BC′ (¹).

175. Le cas particulier où, dans le problème n° 173, les points fixes S_1, S_2,... sont tous sur une même droite s, doit être traité séparément. Si le nombre des côtés du polygone cherché est pair, le théorème du n° 146 est applicable; et, dans ce cas, ou bien le problème n'aura aucune solution ou il en aura une infinité. Qu'il s'agisse, par exemple, d'inscrire dans la conique un octogone dont les sept premiers côtés passent par les points S_1, S_2,..., S_7, le dernier côté passera alors, en vertu de ce théorème, par un point fixe S de s; mais le point S n'est pas quelconque, il est déterminé par les points S_1, S_2,..., S_7. Donc, si le dernier point S_8 coïncide avec S, il y a une infinité d'octogones qui satisfont aux conditions données. Si cette coïncidence n'a pas lieu, il n'y a aucune solution.

(¹) Poncelet, *loc. cit.*, p. 354.

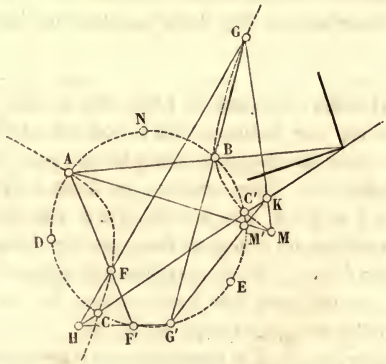
Si le nombre des côtés du polygone demandé est impair, le problème est déterminé. Supposons qu'il s'agisse d'inscrire un heptagone (*fig.* 114) dont les côtés passent par les points donnés $S_1, S_2, \ldots, S_7$, tous en ligne droite. D'après le théorème (146), il y a une infinité d'octogones dont les sept premiers côtés passent par sept points donnés en ligne droite, et dont le huitième côté passe par un point fixe S de cette droite. Si, parmi ces octogones, il y en a un dont le huitième côté soit tangent à la conique, le problème sera résolu, car ce polygone ayant deux sommets infiniment voisins ou coïncidents se réduira à un heptagone inscrit dont les côtés passeront par sept points donnés. Donc, si l'on peut mener des tangentes à la conique par le point S, le point de contact de chacune d'elles donnera une solution (146). Donc, suivant la position du point S par rapport à la courbe, il y a deux solutions, une solution, ou il n'y en a aucune.

La *fig.* 116 se rapporte au cas de ce problème où il s'agit d'inscrire un triangle [1].

L'élève pourra s'exercer à résoudre le problème corrélatif : circonscrire à une conique un polygone dont les sommets tombent sur des rayons donnés d'un faisceau. Ce problème est aussi indéterminé ou sans solution si le polygone est d'ordre pair ; il est déterminé et du second degré si le polygone est d'ordre impair (*fig.* 115 et 117).

176. *Lemme.* — Si deux coniques se coupent aux points A, B, C, C′, et si l'on mène par A, B respectivement deux droites qui coupent la pre-

Fig. 156.



mière conique en F, G et la seconde en F′, G′, les cordes FG, F′G′ concourent en un point H de la droite CC′ (*fig.* 156).

---

[1] Pappus, *loc. cit.*, liv. VII, p. 117.

En effet, la transversale CC′ rencontre la première conique et les côtés opposés du quadrangle inscrit ABGF en six points formant trois couples en involution (n° 143, à gauche); la même chose a lieu pour la seconde conique et le quadrangle inscrit ABG′F′; mais les deux involutions coïncident (98), car elles ont deux couples communs de points conjugués : le couple des points CC′, où la transversale coupe l'une et l'autre conique, et le couple des points où la transversale rencontre les côtés opposés AFF′, BGG′ qui appartiennent aux deux quadrangles. Donc tout autre couple de points conjugués sera commun aux deux involutions, c'est-à-dire que la transversale CC′ rencontrera FG et F′G′ en un même point H conjugué à celui où elle coupe AB.

La proposition qui précède, simple corollaire du théorème de Desargues, donne immédiatement la solution des deux problèmes suivants, l'un du premier, l'autre du second degré.

I. *Problème.* — Étant donnés sept points A, B, C, D, E, F, G, trouver le quatrième point commun aux deux coniques circonscrites l'une au pentagone ABCDE, l'autre à ABCFG (*fig.* 156).

De deux des points communs menons les transversales AF, BG qui coupent la première conique en F′, G′, points que l'on sait construire (n° 124, à droite). Les droites FG, F′G′ concourent en un point H de la corde qui joint les deux autres points communs. Cette corde sera donc HC et il suffira de construire le point C′ où elle rencontre l'une et l'autre conique ; le point C′ sera le point cherché.

II. *Problème.* — Étant donnés huit points A, B, D, E, F, G, M, N, trouver les deux points d'intersection restants des deux coniques circonscrites l'une au pentagone ABDEN, l'autre à ABFGM (*fig.* 156).

Tirons AF, BG qui coupent la première conique en F′, G′; le point H commun à FG et à F′G′ appartiendra à la corde qui joint les deux points cherchés. De même, si AM coupe de nouveau la première conique en M′, le point K commun à GM, G′M′ sera situé sur la même corde. Donc les points cherchés sont sur HK, et le problème est ramené à la construction des intersections C, C′ (166) de l'une ou de l'autre conique avec HK [1].

III. La construction ne change pas si les points A, B sont infiniment voisins, c'est-à-dire si les coniques sont tangentes en un point donné à une même droite donnée (142).

Dans ce cas, étant données deux coniques tangentes entre elles en un point A, on obtient la droite HK qui joint les deux points C, C′ d'intersection. Si cette droite passait par A, un des points C, C′ coïnciderait avec A, car une conique ne peut avoir trois points en ligne droite. On peut

---

[1] Gaskin, *The geometrical construction of a conic section*, etc. (Cambridge, 1852), p. 26, 40.

dire alors que trois des quatre points communs aux deux coniques sont réunis en A (ou infiniment voisins) (*voir* n° 42); on dit encore que les deux coniques *s'osculent* au point A. La construction donne un point H de la droite qui joint le point A au quatrième point C d'intersection. Il peut arriver enfin que cette droite coïncide avec la tangente en A; on dit alors que A tient lieu de quatre points coïncidents (ou infiniment voisins) communs aux deux coniques.

IV. Appliquons maintenant le lemme à une conique donnée et à un cercle qui lui est tangent en A. De A tirons la normale (perpendiculaire à la tangente en A) : elle rencontre de nouveau la conique en F et le cercle en F'; sur AF comme diamètre décrivons un cercle : ce cercle tangent à la conique en A et sécant en F coupera cette courbe en un autre point G, et l'angle AGF sera droit. Le premier cercle coupe AG en G'; en vertu du lemme, FG, F'G' concourront sur la corde HK; mais FG, F'G' sont parallèles, parce que l'angle AG'F' est aussi droit; donc, *pour tous les cercles tangents en* A *à la conique, la corde* HK *a une direction constante, la direction* FG.

Si la corde HK passe par A, le cercle sera *osculateur* à la conique en A. Par suite, menons par A la parallèle à FG : elle coupera la conique en C; le cercle tangent en A et sécant en C sera le cercle *osculateur* en A [1].

Vice versâ, on peut construire la conique qui passe par trois points donnés A, P, Q et qui a, en A, un cercle donné pour cercle osculateur. Les droites AP, AQ coupent le cercle donné en P', Q'; soit U le point de concours de PQ, P'Q'. Tirons AU, cette droite coupera de nouveau le cercle en C; la conique cherchée passera par C : elle est donc déterminée par les quatre points A, P, Q, C et par la tangente en A (tangente au cercle).

V. La proposition corrélative du lemme précédent peut s'énoncer ainsi :

Si a, b sont deux tangentes communes à deux coniques et si, de deux points pris respectivement sur a, b on mène les tangentes f, g à la première conique et les tangentes f', g' à la seconde, les points fg, $f'g'$ seront en ligne droite avec le point de concours des deux autres tangentes communes aux coniques données.

Cette proposition sert à résoudre les problèmes corrélatifs des problèmes I et II : trouver les tangentes communes non données (une ou deux) à deux coniques, dont chacune est déterminée par cinq tangentes données, parmi lesquelles il y en a déjà trois ou deux communes aux deux courbes.

177. *Problème.* — On donne onze points A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, P; construire par points la conique qui passe par P et par les quatre

---

[1] Poncelet, *loc. cit.*, n°s 334-337.

points (non donnés) communs aux coniques (non tracées) ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$ [1].

Menons par P une transversale quelconque, et construisons (n° 166, à gauche) les points M, M′ où elle coupe la conique ABCDE et les points N, N′ où elle coupe la conique $A_1B_1C_1D_1E_1$. Comme ces deux coniques et la conique cherchée doivent être circonscrites à un même quadrangle, nous pourrons appliquer le théorème de DESARGUES. Donc, si l'on construit (n° 102, à gauche) le point P′ conjugué à P dans l'involution déterminée par les couples MM′, NN′, le point P′ appartiendra à la conique cherchée. En faisant pivoter la transversale autour de P, on obtiendra d'autres points de la même conique.

178. *Problème.* — On donne dix points A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 et une droite s, construire une conique tangente à s et qui passe par les quatre points (non donnés) communs aux coniques non décrites ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Construisons (n° 166, à gauche) les points M, M′ communs à s et à la conique ABCDE, et les points N, N′ communs à s et à la conique $A_1B_1C_1D_1E_1$, puis les points doubles de l'involution déterminée par les couples MM′, NN′. Si P est un de ces points doubles, P sera le point de contact (145) entre s et une conique circonscrite au quadrangle formé par les quatre points communs aux coniques ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$. Le problème est donc ramené à celui du numéro précédent.

179. Les constructions corrélatives donnent les solutions des problèmes corrélatifs.

Construire une conique qui passe par un point donné, ou soit tangente à une droite donnée et soit inscrite au quadrilatère formé par les quatre tangentes (non données) communes à deux coniques (non tracées) dont chacune est déterminée par cinq tangentes.

180. *Problème.* — Par un point donné S, mener une droite qui soit coupée par quatre droites données a, b, c, d en quatre points ayant un rapport anharmonique donné.

Nous avons vu (115) que les droites qui sont coupées par quatre droites données a, b, c, d en quatre points ayant un rapport anharmonique donné sont toutes tangentes à une même conique tangente aux droites données, et que, si D est le point de contact de d, et si A, B, C sont les points où d coupe a, b, c, le rapport anharmonique (ABCD) est égal à celui des quatre points où les droites a, b, c, d sont coupées par

---

[1] PONCELET, *loc. cit.*, n° 389.

une autre tangente quelconque de la conique. La solution du problème sera donc la suivante :

Construisons (53) le point D de la droite d qui, avec les points $ad \equiv$ A, $bd \equiv$ B, $cd \equiv$ C donne le rapport anharmonique (ABCD) égal au rapport donné; puis (n° 160, à droite) construisons les droites qui passent par S et sont tangentes à la conique déterminée par les quatre tangentes a, b, c, d et par le point de contact D sur d : chacune de ces droites résoudra le problème proposé.

Si une des droites a, b, c, d est à distance infinie, le problème devient le suivant :

Par un point donné S tracer une droite telle, que les segments interceptés sur elle par trois droites données a, b, c (entre a et b, a et c) aient entre eux un rapport donné.

Construisons sur a le point A qui, avec les points $ab \equiv$ B, $ac \equiv$ C, donne au rapport AB : AC la valeur donnée, et menons par S les tangentes à la parabole déterminée par les tangentes a, b, c et par le point de contact A sur a.

La construction corrélative donnera la solution du problème suivant :

Sur une droite donnée s trouver un point d'où l'on puisse projeter quatre points donnés A, B, C, D au moyen de quatre rayons ayant (53) un rapport anharmonique donné.

181. *Problème.* — On donne deux droites ponctuelles projectives u, u', trouver deux segments correspondants que l'on puisse voir de deux points donnés O, O' sous des angles donnés [1]. Prenons sur u' deux points A', D', de manière que l'angle A'O'D' soit égal au second des angles donnés; soient A, D les points de u qui correspondent à A', D'; déterminons sur u le point A_1, tel que l'angle A_1OD soit égal au premier des angles donnés; il est clair que le problème serait résolu si OA_1 se confondait avec OA, car alors les angles AOD, A'O'D' seraient tous les deux égaux aux angles donnés. Si l'on fait varier simultanément les rayons OA, O'A', O'D', OD, OA_1, tous les faisceaux engendrés sont projectifs entre eux. En effet, les faisceaux engendrés par O'A', O'D' sont projectifs, ainsi que ceux qui sont engendrés par OA_1, OD, parce que les angles A'O'D', A_1OD sont constants (82); les faisceaux engendrés par OA, O'A' et par OD, O'D' sont aussi projectifs à cause de la projectivité de u et u'. Donc les faisceaux engendrés par les rayons OA, OA_1 sont projectifs, et les rayons unis résoudront le problème. Faisons trois essais analogues au précédent, nous obtiendrons trois couples de rayons correspondants OA et OA_1, OB et OB_1,

---

[1] C'est-à-dire si MP, M'P' sont les segments demandés, de manière que les angles MOP, M'O'P' soient donnés de grandeur et de sens.

OC et OC_1, et construisons les rayons unis des faisceaux projectifs concentriques déterminés par ces trois couples (162). Si un des rayons unis rencontre u en M et si l'on prend sur u le point P, tel que l'angle MOP soit égal au premier des angles donnés, et si ensuite on nomme M′, P′ les points de u' qui correspondent à M, P, l'angle M′O′P′ sera égal au second des angles donnés : le problème sera donc résolu.

182. *Problème.* — On donne deux ponctuelles projectives $u \equiv ABC\ldots$, $u' \equiv A'B'C'\ldots$, trouver deux segments correspondants égaux (en grandeur et en direction) à deux segments donnés.

Prenons sur u' un segment A′D′ égal au second segment donné, et sur u le segment AD correspondant à A′D′. Prenons sur u le point A_1, tel que A_1D soit égal au premier segment donné; le problème serait résolu si les points A, A_1 coïncidaient. En faisant varier simultanément les points A, A′, D′, D, A_1, ils engendrent autant de ponctuelles projectives : en effet, les ponctuelles engendrées par A et A′ sont projectives, ainsi que celles engendrées par D et D′, à cause de la projectivité de u et de u'; les ponctuelles décrites par A_1 et D, et celles décrites par A′, D′ sont aussi projectives comme engendrées par le mouvement de segments constants (77). Donc les ponctuelles engendrées par A, A_1 sont projectives, et leurs points unis résoudront le problème. Il suffira donc d'obtenir trois couples de points correspondants A et A_1, B et B_1, C et C_1 au moyen de trois essais, et puis de construire les points unis (162).

183. L'élève aura certainement remarqué la constance de la méthode que nous avons employée pour résoudre les problèmes précédents. Elle est générale, uniforme et directe; on peut l'appliquer d'une manière plus ou moins simple à tous les problèmes du second degré, c'est-à-dire à toutes les questions qui, traitées algébriquement, dépendraient d'une équation du second degré, ou d'une équation de degré supérieur réductible au second. La méthode consiste à faire trois essais, qui donnent trois couples d'éléments correspondants de deux formes projectives superposées; et les éléments unis donnent les solutions du problème. C'est pour cela que cette manière de procéder a été considérée, à bon droit, comme une *méthode géométrique de fausse position* [1].

184. Les problèmes du second degré (ou réductibles au second degré), comme tous ceux de la Géométrie élémentaire, se résolvent au moyen de la règle et du compas seulement, c'est-à-dire au moyen d'intersections de droites et de cercles [2]. Mais, d'autre part, on peut faire dépendre cha-

---

[1] CHASLES, *Géom. sup.*, p. 212.

[2] On appelle *problème du premier degré* ceux qui peuvent être résolus au

cun de ces problèmes de la détermination des éléments unis de deux formes projectives superposées, détermination qui se réduit (162) à la construction des points unis de deux séries projectives (157) données sur un cercle tout à fait arbitraire. Il suit de là qu'un seul cercle, décrit une fois pour toutes, peut servir à résoudre tous les problèmes du second degré [1] proposés relativement à des éléments donnés dans un plan fixe (le plan du dessin). Après avoir tracé ce cercle, la question se réduira à transporter sur sa circonférence, au moyen de projections et de sections, les trois couples de points qui déterminent les deux formes projectives, dont les éléments unis résolvent le problème; et puis à tracer la droite qui contient les points de rencontre des couples de côtés opposés de l'hexagone inscrit qui a pour sommets opposés les points des trois couples ci-dessus (157).

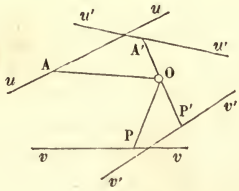
Il est superflu de faire remarquer que, au lieu de faire dépendre la solution du problème des éléments unis de deux formes projectives superposées, on peut toujours le réduire à la recherche des éléments doubles d'une involution (165).

Nous avons déjà donné, au n° 89, un exemple de la manière de résoudre un problème du second degré au moyen de la règle seulement, en supposant qu'un cercle auxiliaire soit tracé dans le plan du dessin, et que l'on connaisse le centre de ce cercle. Nous trouverons d'autres exemples de cela plus loin.

185. On résout les problèmes suivants d'une manière semblable :

I. On donne (*fig.* 157) deux droites ponctuelles projectives u, u' et

Fig. 157.



deux autres droites ponctuelles projectives v, v'; on demande de mener par le point O deux droites s et s', qui coupent respectivement u et u' en

---

moyen de la règle seulement, c'est-à-dire par des intersections de droites. *Voir* Lambert, *loc. cit.*, p. 161; Brianchon, *loc. cit.*, p. 6; Poncelet, *loc. cit.*, p. 76.

[1] Poncelet, *loc. cit.*, p. 187; Steiner, *Die geometrischen Konstructionen ausgeführt mittelst der geraden Linien und eines festen Kreises* (Berlin, 1833), p. 67.

deux points correspondants, et en même temps v et v' en deux points correspondants.

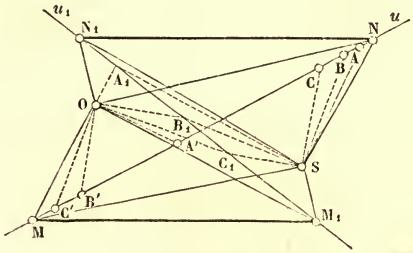
Par O menons une droite qui coupe u' et v' en A′, P′; soient A le point de u qui correspond à A′, et P le point de v qui correspond à P′. Le problème serait résolu si les droites OA, OP coïncidaient. En faisant varier simultanément ces droites, elles décrivent deux faisceaux projectifs concentriques (déterminés par trois essais analogues à celui que nous avons fait), dont les rayons unis donneront les solutions du problème.

II. On peut supposer, dans le problème qui précède, que les ponctuelles u et u' sont superposées ainsi que v et v'. Si les quatre ponctuelles étaient sur une même droite, le problème pourrait s'énoncer ainsi :

Étant données sur une droite deux ponctuelles projectives u, u', et deux autres ponctuelles projectives v, v', trouver un couple de points qui soient correspondants tant dans u, u' que dans v, v'.

III. Entre deux droites données u, u_1, placer un segment qui soit vu de deux points O et S sous des angles donnés (*fig.* 158).

Fig. 158.



Menons par S deux droites qui coupent u, u_1 en A, A_1, de manière que l'angle ASA_1 soit égal au second des angles donnés; puis traçons par O une autre droite qui coupe u en A′, de manière que l'angle $A'OA_1$ soit égal au premier des angles donnés. Le problème serait résolu si OA se confondait avec OA′. Trois essais, comme celui que nous venons de faire, donneront trois couples de rayons correspondants (OA et OA′, OB et OB′, OC et OC′) des deux faisceaux projectifs qui seraient décrits si l'on faisait varier simultanément OA, OA′; les rayons unis OM, ON de ces faisceaux donnent les solutions (MM_1, NN_1) du problème.

IV. On donne deux ponctuelles projectives u, u', trouver deux segments correspondants AM, A′M′, comptés à partir de deux points correspondants donnés A, A′, dont le rapport $AM : A'M' = \lambda$ soit donné.

Soient A et A′, B et B′, C et C′ trois couples de points correspondants de u, u'; prenons sur u deux nouveaux points B″, C″, tels que $AB'' = \lambda A'B'$,

$AC'' = \lambda A'C'$. Les points A, B'', C'',... déterminent une ponctuelle semblable à A'B'C'... (73) et, par suite, projective à ABC.... Les ponctuelles projectives superposées AB''C''..., ABC... ont déjà un point uni A; l'autre point uni M résoudra le problème, car on aura

$$AM = AM'' = \lambda A'M'.$$

Ce problème est du premier degré.

V. On donne deux ponctuelles projectives superposées ABC..., A'B'C'..., trouver un segment MM' qui ait pour point milieu un point donné O.

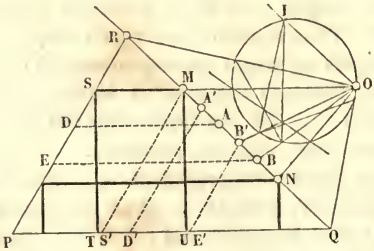
Prenons les points A'', B'', C'', de manière que O soit le point milieu des segments AA'', BB'', CC''; les points A'', B'', C'',... déterminent une ponctuelle égale à ABC... et, par suite, projective à A'B'C'.... Construisons les points unis des ponctuelles projectives superposées A'B'C'..., A''B''C''...; si M' ou M'' est un des points unis, O sera le milieu du segment MM'.

VI. On donne un segment EF, trouver sur EF deux points M, M' tels, que le segment MM' soit égal à un segment donné et que le rapport anharmonique (EFMM') soit égal à un nombre donné.

Prenons sur la droite donnée trois points quelconques A, B, C; puis déterminons les trois points A', B', C', de manière que les rapports anharmoniques (EFAA'), (EFBB'), (EFCC') soient tous égaux à celui qui est donné, et les trois points A'', B'', C'', de manière que les segments AA'', BB'', CC'' soient égaux au segment donné. Alors (61, 83) les ponctuelles ABC..., A'B'C'... seront projectives, les ponctuelles ABC..., A''B''C''... le seront aussi (77); donc les ponctuelles A'B'C'..., A''B''C''... seront projectives. Si elles ont des points unis, soit M' ou M'' l'un d'eux, et soit M le point qui lui correspond dans la ponctuelle ABC..., le segment MM' et le rapport anharmonique (EFMM') auront les valeurs données, et le problème sera résolu.

VII. Inscrire, dans un triangle donné PQR, un rectangle ayant une aire donnée (*fig.* 159).

Fig. 159.



Soit MSTU le rectangle cherché; menons MS' parallèle à PR, nous au-

rons le parallélogramme MSPS′ équivalent au rectangle; nous pourrons donc transformer le problème en celui-ci :

Trouver sur QR un point M tel, qu'en tirant MS, MS′ parallèles respectivement à PQ, PR, nous ayons PS.PS′ égal à un carré donné k^2.

Prenons un point A quelconque sur QR; tirons AD parallèle à PQ, et prenons sur PQ le point D′, tel que $PD.PD' = k^2$, puis menons D′A′ parallèle à PR. Si les points A et A′ coïncidaient, le problème serait résolu.

En faisant varier simultanément les points A, D, D′, A′, ils décriront autant de ponctuelles projectives. En effet, comme D est la projection de A faite du point à l'infini de PQ, et A′ la projection de D′ du point à l'infini de PR, la deuxième ponctuelle est perspective de la première, et la quatrième de la troisième. La deuxième et la troisième sont projectives, car la relation

$$PD.PD' = k^2$$

montre (59) que les points D, D′, variant simultanément, décrivent deux ponctuelles projectives dont les points à l'infini ont un même point correspondant P [1].

Trois essais semblables donnent trois couples de points comme A, A′; si l'on construit les points unis, on aura les solutions du problème. Au lieu de prendre le point A de départ tout à fait arbitrairement dans les trois essais, on peut lui donner une position particulière qui abrége les constructions. Cette remarque peut s'appliquer à tous les problèmes que nous avons examinés. Pour celui qui nous occupe, il est clair que, si A passe à l'infini, sa projection D va aussi à l'infini; par suite, D′ tombe en P, d'où il résulte que A′ coïncidera avec R; si l'on place le point A en Q, la projection D coïncide avec P; donc D′ et, par suite, A′ vont à l'infini. Voilà donc deux essais qui ne demandent aucune construction; les couples AA′, qui en résultent, se composent de R et du point à l'infini, du point à l'infini et de Q. Appelons BB′ le couple donné par un troisième essai, et AA′ un couple quelconque; nous aurons (59)

$$QA.RA' = QB.RB',$$

et, par suite, si M est un point uni,

$$QM.RM = QB.RB',$$

d'où nous pouvons tirer les points unis; mais il sera toujours plus simple

---

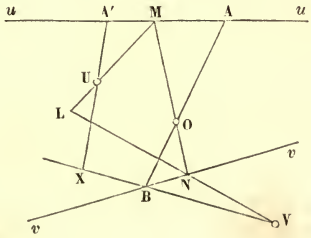
[1] En nommant u, u' les deux ponctuelles, si l'on se reporte à la construction du n° 67, à gauche, on voit que la ponctuelle auxiliaire u'' est tout entière à l'infini. Il s'ensuit qu'après avoir obtenu un couple de points correspondants D, D′, pour trouver le point E′ correspondant à un autre point E de $PR \equiv u$, il suffit de joindre D′E, puis de tirer DE′ parallèle à D′E.

de recourir à la construction générale du n° 162, c'est-à-dire de mener, par un point O quelconque d'une circonférence, les droites OB, OB′, OR, OQ et la parallèle à QR qui coupent de nouveau le cercle en B_1, B'_1, R_1, Q_1, I [1]; puis joignons le point commun à $B_1 Q_1$, B'_1 I au point commun à B_1 I, $B'_1 R_1$; si cette droite coupe le cercle en deux points, les droites qui les projettent du point O rencontreront QR aux points unis cherchés M, N, qui résolvent le problème.

VIII. Construire un polygone dont les côtés passent respectivement par autant de points donnés, et dont tous les sommets moins un sont sur autant de droites données, tandis que l'angle au dernier sommet est égal à un angle donné.

Qu'il s'agisse, par exemple, de construire un triangle LMN (*fig.* 160), dont les trois côtés MN, NL, LM doivent passer respectivement par O, V, U,

Fig. 160.



et dont les deux sommets M, N doivent se trouver sur les droites u, v. Menons par O une droite quelconque qui coupe u en A, v en B, et par U la droite UX qui forme avec BV un angle égal à l'angle donné. Soit A′ le point où u est coupé par UX, le problème serait résolu si les points A, A′ coïncidaient. On obtiendra les solutions du problème en construisant les rayons unis des faisceaux projectifs engendrés par la variation simultanée des droites OA, OA′. VA′

IX. Le problème suivant est compris dans le précédent :

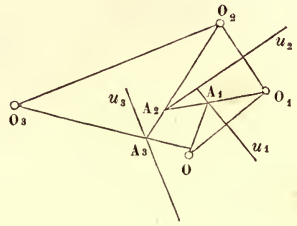
Un rayon de lumière part d'un point donné O et se réfléchit successivement sur n droites données $u_1, u_2, \ldots, u_n$; déterminer la direction qu'il faut donner au rayon initial pour que le dernier rayon réfléchi le coupe sous un angle donné.

En effet, d'après la loi de la réflexion, si le rayon incident OA_1 (*fig.* 161) rencontre u_1 en A_1, le rayon réfléchi et le rayon incident feront des angles égaux (opposés) avec u_1; par suite, comme le rayon incident passe par le

[1] De ces points I seul est représenté dans la figure.

point fixe O, le rayon réfléchi passera constamment par le point O_1 symétrique de O par rapport à u_1 [1]. De la même manière, quand le premier

Fig. 161.



rayon réfléchi aura rencontré u_2 en A_2, il se réfléchira suivant la même loi; par suite, le second rayon réfléchi passera par un point fixe O_2 symétrique de O_1 par rapport à u_2, et ainsi de suite. Le rayon initial et les n rayons réfléchis successifs seront donc les côtés d'un polygone $A_1 A_2 A_3 \ldots$, dont $n+1$ côtés doivent passer par autant de points donnés $O, O_1, O_2, \ldots, O_n$, tandis que l'angle A doit être égal à un angle donné et que les sommets des n autres angles doivent tomber sur n droites données $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

X. *Problème.* — Construire un polygone dont les sommets se trouvent sur des droites données et dont les côtés soient vus sous des angles donnés de points donnés.

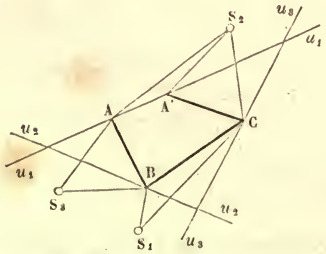
Supposons qu'il s'agisse de construire un triangle dont les sommets 1, 2, 3 doivent tomber sur des droites données u_1, u_2, u_3 et dont les côtés 23, 31, 12 soient vus sous des angles donnés ω_1, ω_2, ω_3 des points donnés S_1, S_2, S_3. Prenons un point A quelconque sur u_1 (*fig.* 162); menons AS_3, faisons l'angle AS_3B égal à ω_3. Le deuxième côté de cet angle coupe u_2 en B. Faisons l'angle BS_1C égal à ω_1. Soit C le point commun au deuxième côté de cet angle et à u_3, et faisons l'angle C_2SA' égal à ω_2. Le problème serait résolu si le deuxième côté S_2A' coïncidait avec S_2A. Si nous faisons pivoter S_2A autour de S_2, les autres rayons S_3A, S_3B, S_1B, S_1C, S_2C, S_2A' varient en même temps et engendrent autant de faisceaux, tous projectifs entre eux. En effet, les faisceaux engendrés par S_3A, S_2B sont projectifs (82), parce que l'angle AS_3B est constant; les faisceaux engendrés par S_3B, S_1B sont projectifs, puisqu'ils sont perspectifs, et ainsi de suite. Les solutions du problème seront donc données par les

[1] C'est-à-dire un point O_1 tel que OO_1 soit perpendiculaire à u_1 et divisé en deux parties égales par cette droite.

rayons unis des faisceaux projectifs concentriques engendrés par S_2A, S_2A'.

Le problème se résout de la même manière si les angles en S_1, S_2, au lieu d'être égaux à des angles donnés, doivent être divisés par des couples

Fig. 162.



de droites données, telles qu'en chacun de ces points on ait un faisceau de quatre rayons ayant un rapport anharmonique donné. Si, pour chacun des points donnés S_1, S_2,..., le faisceau doit être harmonique, et si les rayons donnés sont orthogonaux, le problème peut s'énoncer ainsi (52) :

Construire un polygone dont les sommets tombent sur des droites données et dont les côtés soient vus de points donnés sous des angles ayant des bissectrices données.

XI. La même méthode donne la solution du problème :

Construire un polygone dont les côtés passent par des points donnés et dont les angles divisent des segments donnés suivant des rapports anharmoniques donnés [1].

On obtient des cas particuliers de ce problème en supposant que chaque angle doive intercepter sur une droite donnée un segment donné de grandeur et de direction, ou un segment qui soit divisé par un point donné en deux parties ayant un rapport donné [2].

§ XX. — Pôles et polaires.

186. Il résulte des nos **160, 161** que, si S est un point quelconque (*fig.* 128, 131) du plan d'une conique, et si l'on mène

---

[1] C'est-à-dire les côtés d'un angle doivent rencontrer une droite donnée, sur laquelle il y a deux points fixes A, B, en deux autres points C, D, de manière que le rapport anharmonique (ABCD) soit un nombre donné.

[2] Ces problèmes sont extraits de Chasles, *Géom. sup.*, p. 219-223, et de Townsend, *Chapter on the modern Geometry* (Dublin, 1865), t. II, p. 257-274.

par ce point autant de transversales qu'on voudra coupant la courbe aux couples de points (A, A′), (B, B′), (C, C′),..., les couples de tangentes (a, a'), (b, b'), (c, c'),... se coupent aux points d'une droite fixe s, qui contient les points de contact des tangentes issues de S; en outre, les couples de droites AB′ et A′B, AC′ et A′C,..., BC′ et B′C,..., AB et A′B′, AC et A′C′,..., BC et B′C′,... se coupent en des points de s. On peut remarquer une autre propriété de la droite s : considérons le quadrangle complet AA′BB′; les deux côtés opposés AA′, BB′ sont coupés harmoniquement par le point diagonal S et par la droite s qui joint les deux autres points diagonaux (49); donc les points A et A′ (de même que B et B′, C et C′,...) sont séparés harmoniquement par S et s.

La droite s, ainsi déterminée par le point quelconque S, est dite *polaire* de S par rapport à la conique; et réciproquement, S est dit *pôle* de la droite s.

Donc *la droite polaire d'un point donné* S *est en même temps :* 1° *le lieu du point de concours des couples de tangentes dont les points de contact sont en ligne droite avec* S; 2° *le lieu des points de concours des couples de côtés opposés de tout quadrangle inscrit dont les diagonales passent par* S; 3° *le lieu d'un point séparé harmoniquement de* S *par deux points de la conique* (¹).

187. Réciproquement, une droite s donnée arbitrairement détermine un point S, dont elle est la *polaire*. En effet, soient A, B deux points pris au hasard sur la conique; les droites a, b, tangentes en A, B, couperont s en deux points d'où l'on peut mener les secondes tangentes a', b'; soient A′, B′ leurs points de contact et S le point d'intersection de AA′, BB′. Alors la polaire de S renfermera les points aa', bb' : elle coïncidera donc avec s. Donc, *si d'un point quelconque de s on peut mener deux tangentes c, c′ à la conique, la droite* CC′ *qui joint leurs points de contact passera par* S.

I. Les droites a, a', b, b' forment un quadrilatère circonscrit

(¹) Apollonius, *loc. cit.*, liv. VII, 37. — Desargues, *loc. cit.*, p. 164 et suiv.; De la Hire, *loc. cit.*, liv. I et II.

dont s est une des diagonales; ses deux autres diagonales se coupent en S (135); donc, *si d'un point quelconque de s on mène deux tangentes à la conique, elles sont séparées harmoniquement par s et une droite qui passe toujours par* S.

II. Le quadrangle complet AA′BB′ et le quadrilatère complet $aa'bb'$ ont le même triangle diagonal (132), dont les sommets sont S, le point commun à AB et A′B′, et le point commun à AB′, A′B; ses côtés sont s, la droite qui joint les points ab, $a'b'$, et la droite qui joint les points ab', $a'b$. Donc, *si de deux points de la droite s on mène les couples de tangentes* (a, a'), (b, b'), *les diagonales du quadrilatère circonscrit* $abab'b'$ *passent par le point* S. On peut se reporter, par exemple, à la *fig.* ~~102~~ 108, en imaginant qu'on ait mis les lettres S, A′, B′, a', b' au lieu de E, D, C, d, c, ou bien les lettres S, A′, B, B′, a', b, b' au lieu de G, B, C, D, b, c, d.

188. Ainsi, *une conique étant donnée, tout point du plan a sa polaire, toute droite a son pôle* [1]. La conique donnée, par rapport à laquelle on considère les pôles et les polaires, s'appelle *conique fondamentale.*

I. Si l'on peut mener deux tangentes à la courbe par un point du plan d'une conique, ce point est dit *extérieur* à la courbe; il est *intérieur* si l'on ne peut mener aucune tangente. Donc :

Si le pôle est extérieur à la conique (160), la polaire coupe la courbe (aux points de contact des tangentes issues du pôle).

Si le pôle est intérieur à la courbe, la polaire ne coupe pas la conique.

II. Si l'on prend comme pôle un point de la conique et si l'on fait pivoter une transversale autour de ce point, un des points d'intersection se confond toujours avec le pôle, et, comme le point de concours des couples de tangentes en ces points doit engendrer la polaire et que la tangente au pôle est fixe, la polaire d'un point de la conique est la tangente en ce point; ou, si le pôle est un point de la conique, la polaire est la tangente en ce point.

---

[1] Desargues, *loc. cit.*, p. 190.

III. Réciproquement, si tous les points de la polaire sont extérieurs à la conique, le pôle est un point intérieur; si la polaire est une sécante de la courbe, le pôle est le point commun aux tangentes aux deux points d'intersection; et si la polaire est une tangente, le pôle est le point de contact.

189. Soient E le pôle et F un point de la polaire (*fig.* 108). Si la droite EF coupe la conique, les deux intersections seront séparées harmoniquement par les points E, F (par suite, un de ces points sera intérieur, l'autre extérieur à la courbe), de sorte que, si nous considérons F comme pôle, E sera un point de la polaire.

Si la droite EF ne coupe pas la conique, la corde de contact des tangentes issues de E passera en F, car cette dernière corde est la polaire de E. Donc :

Si F *est un point de la polaire de* E, *réciproquement* E *est un point de la polaire de* F.

On peut exprimer le même théorème en disant :

Si f est une droite qui passe par le pôle d'une autre droite e, réciproquement e passera par le pôle de f.

En effet, soient E, F les pôles respectifs de e, f; comme, par hypothèse, E est situé sur la polaire de F, F sera aussi sur la polaire de E, c'est-à-dire que e passera par F, pôle de f.

Deux points, tels que E et F, dont l'un est sur la polaire de l'autre, sont dits *conjugués* ou *réciproques* par rapport à la conique. On appelle aussi *conjuguées* ou *réciproques* deux droites telles que e et f, dont l'une passe par le pôle de l'autre.

On peut donner cet autre énoncé du dernier théorème démontré :

Si deux points sont réciproques, leurs polaires sont aussi réciproques, et *vice versâ.*

190. Le même théorème peut encore se mettre sous cette autre forme :

Tout point de la polaire d'un point E a pour polaire une droite qui passe par E;

Toute droite qui passe par le pôle d'une droite donnée e a pour pôle un point de e [1].

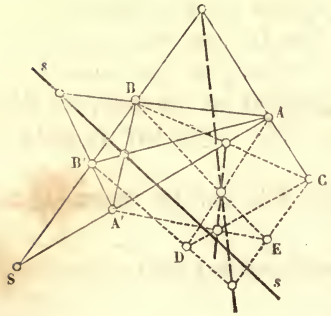
Cela revient à dire : Si nous imaginons qu'un pôle variable F parcourt une droite donnée e, la polaire de F passera toujours par un point fixe E, qui est le pôle de la droite donnée; et réciproquement, si une droite f tourne autour d'un point fixe E, le pôle de f décrira une ligne droite e, qui est la polaire du point donné E.

Ou encore : Le pôle d'une droite donnée e est le centre du faisceau des polaires de ses points, et la polaire d'un point donné E est le lieu des pôles des droites qui passent par E [2].

191. Étant donné un pôle S, construire sa polaire.

I. Si l'on connaît cinq points A, B, C, D, E de la conique, il suffira de tirer deux transversales SA, SB et de construire les points A′, B′, où elles coupent de nouveau la courbe. La droite s, qui joint le point commun à AB′, A′B au point commun à AB, A′B′, sera la polaire du point donné (169) (*fig.* 163).

Fig. 163.

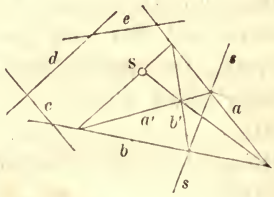


II. Supposons la conique déterminée par cinq tangentes a, b, c, d, e

Étant donnée une droite s, construire son pôle.

Si l'on connaît cinq tangentes a, b, c, d, e de la conique, il suffira de mener par les points sa, sb les secondes tangentes a', b' (124, à gauche). Les diagonales du quadrilatère $aba'b'$ se couperont en un point S qui est le pôle de la droite donnée (*fig.* 164).

Fig. 164.

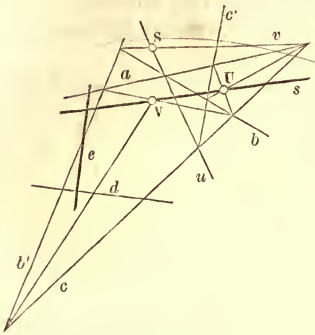


Supposons la conique déterminée par cinq points A, B, C, D, E

(1) Desargues, *loc. cit.*, p. 191.
(2) Poncelet, *loc. cit.*, n° 195.

(*fig.* 165). Menons par S deux transversales u, v, et construisons leurs pôles U, V; la droite UV sera la polaire de S (190). Pour plus de

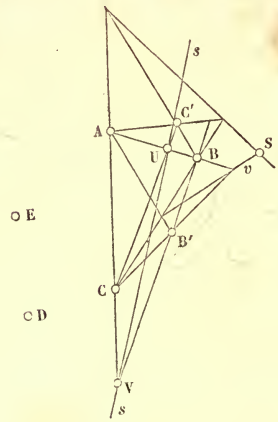
Fig. 165.



simplicité, il conviendra de mener la transversale u par le point ab; après avoir tracé la tangente c' qui passe par le point uc, le pôle U sera le point commun aux diagonales du quadrilatère $acbc'$. De même, après avoir mené la transversale v par le point ac, par exemple, et construit la tangente b' qui passe par le point vb, le pôle V sera le point commun aux diagonales du quadrilatère $abcb'$.

(*fig.* 166). Prenons deux points U, V sur s et construisons leurs polaires u, v. Le point uv sera le pôle de s (190). Pour plus de simplicité,

Fig. 166.



il conviendra de prendre le point U sur la droite AB; après avoir construit l'intersection C' de la conique avec la droite UC, la polaire u sera la droite qui joint les points de concours des côtés opposés du quadrangle ACBC'. De même, V étant un point de la droite AC, par exemple, après avoir construit l'intersection B de la conique et de VB, la polaire v sera la droite qui joint les points de concours des côtés opposés du quadrangle ABCB'.

192. Soient E, F deux points réciproques (*fig.* 108), G le pôle de la droite EF; G sera un point réciproque de E ainsi que de F, c'est-à-dire que les trois points E, F, G sont réciproques deux à deux. Il en résulte que chacun des côtés du triangle EFG est la polaire du sommet opposé, et que les trois côtés sont deux à deux des droites réciproques.

Un triangle, tel que EFG, dans lequel chaque sommet est le pôle du côté opposé, est nommé *triangle conjugué à la conique.*

193. Pour construire un triangle conjugué, on peut prendre arbitrairement un sommet E (*fig.* 108); construire la polaire de E, prendre sur cette droite un point quelconque F, et enfin construire la polaire de F. Elle passera par E, parce que les points E, F sont réciproques. Soit G le point où se coupent les polaires de E, F; EG, FG seront des couples de points réciproques : donc EFG est un triangle conjugué.

En d'autres termes, E étant un point quelconque, tirons par E deux transversales quelconques qui coupent la conique en A et D, B et C. Soient F le point de concours de AC, BD; G le point de concours de AB, CD; EFG sera un triangle conjugué.

On pourrait, au contraire, prendre arbitrairement une droite e, en construire le pôle E, mener par E une droite quelconque f, joindre les pôles de e, f par la droite g, et le triangle efg sera un triangle conjugué, car les droites e, f, g sont réciproques deux à deux.

Après avoir pris arbitrairement une droite e, on peut mener les couples de tangentes a et d, b et c de deux de ses points; si f joint les points ac, bd, et g les points ab, cd, le triangle efg sera conjugué.

194. Ce qui précède met en évidence la propriété suivante :

I. *Les points diagonaux du quadrangle complet formé par quatre points quelconques d'une conique sont les sommets d'un triangle conjugué. Les droites diagonales du quadrilatère complet formé par quatre tangentes quelconques à la conique sont les côtés d'un triangle conjugué* (1).

Ou aussi :

Les points diagonaux d'un quadrangle complet sont les sommets d'un triangle conjugué à toutes les coniques circonscrites au quadrangle. Les droites diagonales d'un quadrilatère complet sont les côtés d'un triangle conjugué à toutes les coniques inscrites au quadrilatère.

II. Des propriétés des quadrilatères circonscrits et des quadrangles inscrits (129-135) on conclut, en outre (*fig.* 108), que :

Si EFG est un triangle conjugué à une conique donnée et si ABC est un triangle inscrit dans la même courbe, dont deux côtés passent respective-

(1) Desargues, *loc. cit.*, p. 186.

ment par les sommets G, F, le troisième côté BC passera par le troisième sommet E, et chaque côté du triangle inscrit sera divisé harmoniquement par le sommet correspondant du triangle conjugué et par la droite qui joint les deux autres sommets.

Les trois droites EA, FB, CG concourront en un point D de la courbe : il en résulte que les deux triangles sont homologiques; par suite, les trois couples de droites FG et BC, GE et CA, EF et AB se couperont en trois points en ligne droite.

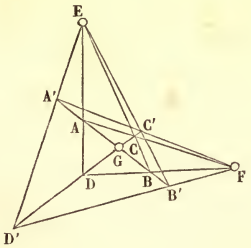
Nous laissons à l'élève le soin d'énoncer la propriété corrélative [1].

195. Des trois sommets du triangle EFG, un est toujours intérieur à la courbe et les deux autres extérieurs. En effet, si E est un point intérieur, la polaire de E ne coupe pas la conique; par suite, F et G sont des points extérieurs; et, si E est un point extérieur, la polaire de E coupe la courbe, les points d'intersection sont séparés harmoniquement par F et G : donc l'un de ces points sera intérieur, l'autre extérieur.

De cette propriété et de celle du n° 188 nous concluons que, des trois côtés d'un triangle conjugué, deux coupent toujours la courbe et un ne la rencontre pas.

196. Supposons que deux quadrangles complets ABCD,

Fig. 167.



A'B'C'D' aient les mêmes points diagonaux EFG, c'est-à-dire que

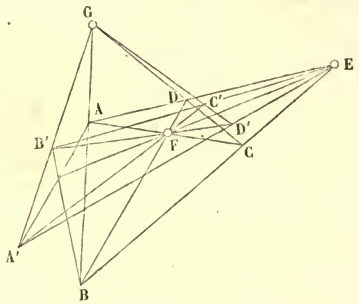
BC,	AD,	B'C',	A'D'	concourent	en E,
CA,	BD,	C'A',	B'D'	»	en F,
AB,	CD,	A'B',	C'D'	»	en G.

[1] Poncelet, *loc. cit.*, p. 104.

Si le point A se trouvait, par exemple, sur AB, comme A′B′ et AB passent par G, B′ serait aussi sur AB; et comme AB, ou A′B′, doit être séparée harmoniquement de CD et aussi de C′D′ par les droites GE, GF, les points C, D, C′, D′ seraient sur une même droite, ce qui revient à dire que les huit points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ seraient sur deux droites (*fig.* 167).

Excluons ce cas, c'est-à-dire, supposons qu'on puisse tracer une conique par les cinq points A, B, C, D, A′; je dis que les points B′, C′, D′ se trouvent aussi sur cette conique (*fig.* 168).

Fig. 168.



En effet, G étant le pôle de EF (puisque E, F, G sont les points diagonaux du quadrangle inscrit ABCD), les deux intersections de la conique et de la transversale GA′B′ seront séparées harmoniquement par le pôle G et la polaire EF; mais une de ces intersections est A′ : donc l'autre est B′; car, E, F, G étant les points diagonaux du quadrangle A′B′C′D′, les points A′, B′ sont séparés harmoniquement par G et EF. On démontre de la même manière que les points C′, D′ appartiennent à la conique. Donc :

Si deux quadrangles complets ont les mêmes points diagonaux, les huit sommets sont ou sur deux droites ou sur une conique.

Comme les droites AB, A′B′ concourent en G, les droites AA′, BB′, ainsi que les droites AB′, A′B, se couperont sur EF, polaire de G. Cette observation donne la manière de construire le point B′, quand on donne les points A, B, C, D, A′. Le

point C′ s'obtiendra ensuite comme intersection des droites A′F, B′E, et le point D′ comme intersection de B′F, A′E, C′G.

197. Je suppose maintenant que deux coniques aient quatre tangentes communes *a*, *b*, *c*, *d*, c'est-à-dire, soient inscrites dans le même quadrilatère. Soient A, B, C, D les quatre points de contact pour l'une, A′, B′, C′, D′ les quatre points de contact pour l'autre. En vertu du théorème du n° 132, le triangle formé par les diagonales du quadrilatère circonscrit *abcd* aura pour sommets les points diagonaux du quadrilatère inscrit ABCD, et aussi les points diagonaux du quadrangle A′B′C′D′; donc les quadrangles ABCD, A′B′C′D′ ont les mêmes points diagonaux. Par suite, d'après le théorème qui précède (196), les huit points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ sont tous ou sur deux droites ou sur une conique.

198. En échangeant, comme à l'ordinaire, les points avec les droites, nous pourrons démontrer les propositions corrélatives, c'est-à-dire :

Si deux quadrilatères complets ont les trois diagonales communes, les huit côtés ou passent par deux points (quatre par l'un et quatre par l'autre) ou sont tangents à une même conique.

Si deux coniques se coupent en quatre points, les huit tangentes en ces points ou passent toutes par deux points (quatre par l'un et quatre par l'autre) ou sont tangentes à une même conique [1].

199. Si l'on donne les points diagonaux E, F, G et un sommet A d'un quadrangle ABCD, le quadrangle est entièrement déterminé, et l'on peut le construire. En effet, D est le point de AE qui est séparé harmoniquement de A par E et FG; de même, C est le point de AF qui est séparé harmoniquement de A par F et GE, et B est le point de AG qui est séparé harmoniquement de A par G et EF.

Comme, d'autre part, quand on a une conique et un triangle conjugué EFG, on peut prendre arbitrairement sur la courbe

---

[1] Staudt, *loc. cit.*, n° 293.

un point A comme sommet d'un quadrangle inscrit ABCD, ayant pour points diagonaux E, F, G (les autres sommets B, C, D sont les secondes intersections de la conique et des droites AE, AF, AG), il en résulte que :

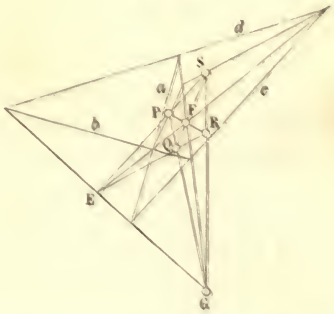
Toutes les coniques qui passent par un point donné A, *et pour lesquelles un triangle donné* EFG *est conjugué, passent par trois autres points déterminés* B, C, D.

200. Le problème : « Construire la conique qui passe par deux points donnés A, A′, et pour laquelle le triangle donné EFG soit un triangle conjugué », se résout de la manière suivante :

On construira, comme nous l'avons dit, les trois points B, C, D qui, avec A, forment un quadrangle complet ayant les points E, F, G pour points diagonaux. On connaîtra alors cinq points A, A′, B, C, D de la courbe; on pourra donc en trouver d'autres au moyen du théorème de Pascal. On pourrait aussi construire les trois points B′, C′, D′ qui, avec A′, forment un quadrangle ayant E, F, G pour points diagonaux; et les huit points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ appartiendraient à la conique cherchée.

201. Supposons qu'il s'agisse de décrire une conique tangente à quatre droites données, qui passe par un point donné S (*fig.* 169). Les diagonales du quadrilatère *abcd* forment un triangle EFG conjugué à la conique; par suite, si l'on construit les trois points P, Q, R qui, avec S, forment un quadrangle ayant pour points diagonaux E, F, G, les trois

Fig. 169.



points ainsi construits appartiendront aussi à la conique demandée. Mais il peut arriver qu'aucune conique ne satisfasse à la question, ou qu'il y en ait deux qui y satisfassent (170, à droite); donc, dans ce second cas,

comme la construction des points P, Q, R est linéaire, les deux coniques passeront par ces points. Ou :

Si deux coniques inscrites dans un même quadrilatère abcd ont un point commun S, *elles se coupent en trois autres points* P, Q, R; *et le triangle formé par les diagonales du quadrilatère circonscrit abcd coïncide avec celui que forment les points diagonaux du quadrangle inscrit* PQRS.

Pour la construction des points P, Q, R, du point P, par exemple, qui se trouve sur la droite ES (*fig.* 157), j'observe que les points P, S doivent être séparés harmoniquement par E et FG; mais la diagonale (ab) (cd), qui passe par E, est aussi divisée harmoniquement en E, F: nous avons donc deux formes harmoniques qui sont perspectives à cause du point uni E; par suite, les droites P(ab), S(cd), FG, qui joignent les autres couples de points correspondants, concourront en un même point (43, 62). Il faudra donc joindre S à une extrémité d'une des diagonales qui passent par E, au point cd, par exemple; cette droite rencontrera FG en un point que l'on joindra à l'autre extrémité de la même diagonale, c'est-à-dire au point ab, par une droite qui coupera ES au point cherché P [1].

202. Les propositions corrélatives sur lesquelles l'élève fera bien de s'exercer sont les suivantes :

Toutes les coniques tangentes à une droite donnée, pour lesquelles un triangle donné est un triangle conjugué, sont tangentes à trois autres droites déterminées.

Construire la conique qui soit tangente à deux droites données, et pour laquelle un triangle donné est un triangle conjugué.

Si deux coniques circonscrites à un même quadrangle ont une tangente commune, elles ont aussi trois autres tangentes communes.

Construire les trois tangentes communes aux deux coniques qui passent par quatre points donnés et sont tangentes à une droite donnée (170, à gauche).

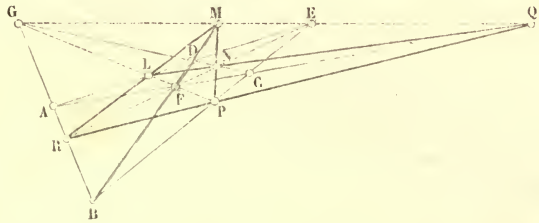
203. Soit un quadrangle complet ABCD, dont les points diagonaux sont E, F, G (*fig.* 170). Soient aussi

L, P	les points où	FG	coupe	AD, BC,
M, Q	»	GE	»	BD, CA,
N, R	»	EF	»	CD, AB.

[1] Brianchon, *loc. cit.*, p. 45. — Maclaurin, *De lin. Geom.*, § 43.

Les six points ainsi obtenus sont les sommets d'un quadrilatère complet; en effet, le triangle EFG est homologique à chacun des triangles suivants : ABC, DCB, CDA, BAD; les centres d'homologie sont respectivement D, A, B, C. Il s'ensuit que les ternes de points PQR, PMN, LQN, LMR sont sur autant de droites (axes d'homologie).

Fig. 170.



Ces quatre droites forment un quadrilatère dont les diagonales LP, MQ, NR forment le triangle EFG. Il en résulte que la conique inscrite dans le quadrangle ABCD et passant par L passe aussi par N, P, R (201); il y a, de même, une conique inscrite dans le quadrangle ABDC qui passe par R, M, N, Q, et une autre, inscrite dans le quadrangle ACBD, qui passe par Q, P, M, L.

Pour chacune de ces coniques, les quatre tangentes données par la figure (les quatre côtés du quadrangle complet ABCD) sont harmoniques; par suite, les quatre points de contact le sont aussi (111, 161). En effet, si nous considérons un côté quelconque de ce quadrangle, AB par exemple, il est divisé harmoniquement aux points R, G (cela se déduit de la considération du quadrangle complet CDEF); les points A, B, G sont les intersections de la tangente AB avec les trois autres tangentes, tandis que R est le point de contact de la première tangente; donc les quatre tangentes seront coupées par une autre tangente quelconque de la conique considérée en quatre points harmoniques [1].

Si ABCD est un parallélogramme, les points E, G, M, Q passent à l'infini, et LNPR devient aussi un parallélogramme. Des trois coniques que nous venons de rencontrer, la première sera, dans ce cas, une ellipse tangente aux côtés du parallélogramme ABCD en leurs points milieux; la seconde, une hyperbole tangente aux côtés AB, CD en leurs points milieux et ayant pour asymptotes AC, BD; la troisième, une hyperbole ayant les mêmes asymptotes et tangente aux côtés AD, BC en leurs milieux.

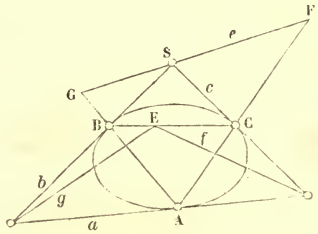
---

[1] Steiner, *loc. cit.*, p. 160; Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nuremberg, 1856, p. 57, 60), n° 329.

204. Du corollaire du théorème de Brianchon, relatif à un quadrilatère circonscrit (135), nous avons déjà déduit (136) la règle pour construire les tangentes d'une conique dont on connaît trois tangentes a, b, c et deux points de contact B et C (*fig.* 108). Joignons un point quelconque E de BC aux points ab, ac; ces droites g, f rencontreront respectivement c, b en deux points par lesquels il suffira de faire passer une droite pour avoir une tangente d de la conique.

Les quatre tangentes a, b, c, d forment un quadrilatère complet, dont deux diagonales $g \equiv (ab)(cd)$, $f \equiv (ac)(bd)$ concourent en E; donc (135) la corde de contact AD des tangentes a, d coupera aussi BC en E. Les droites menées par E et par les points ab, ac, étant deux diagonales du quadrilatère $abcd$, sont des droites réciproques; donc (*fig.* 171) :

Fig. 171.



Si un triangle abc est circonscrit à une conique, les droites qui joignent un point quelconque E de la polaire d'un sommet bc aux deux autres sommets (ab), (ac) sont des droites réciproques.

Ou réciproquement : *Si deux droites sont tangentes à une conique, deux droites réciproques issues d'un point quelconque de la corde de contact coupent les deux tangentes données en des points qui appartiennent à une troisième tangente.*

205. Nous allons exposer maintenant la propriété corrélative. Supposons que l'on donne trois points A, B, C d'une conique, et les tangentes b, c en deux de ces points (*fig.* 108). Une droite e, tracée arbitrairement par le point bc, rencontre

AB, AC en deux points G, F; les droites GC, FB se coupent en un point D de la conique.

Les quatre points A, B, C, D forment un quadrangle complet dont deux points diagonaux sont sur e; donc (129) le point bc et le point commun aux tangentes en A, D tomberont sur e (129). Les points G, F étant deux points diagonaux du quadrangle ABCD sont réciproques; donc (*fig.* ~~160~~) : 170

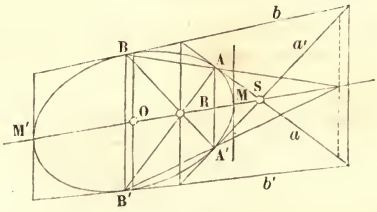
Si un triangle ABC est inscrit dans une conique, les points F, G, où deux de ses côtés sont coupés par une droite quelconque menée par le pôle S du troisième côté, sont réciproques.

Ou réciproquement : *Si l'on joint deux points donnés sur une conique à deux points réciproques en ligne droite avec le pôle de la corde qui joint les points donnés, ces droites se coupent sur un point de la courbe.*

§ XXI. — Centre et diamètre.

206. Prenons comme pôle un point à distance infinie (*fig.* 172) et menons par ce pôle une transversale qui coupe la conique en deux points A, A′. Le segment AA′ sera divisé harmoniquement par le pôle et un point de la polaire (186); le point de la polaire sera donc le milieu de AA′; cela revient à dire :

Fig. 172.



Si, dans une conique, on mène autant de cordes que l'on voudra parallèles entre elles, le lieu de leurs points milieux est une droite qui est la polaire du point à l'infini commun aux cordes (¹).

(¹) Apollonius, *Conic.*, liv. I, 46, 47, 48; liv. II, 5, 6, 7, 28, 29, 30, 31, 34-37.

On donne à cette droite le nom de *diamètre* relatif aux cordes qu'il divise par moitié. Si le diamètre rencontre la conique en deux points, ils seront les points de contact des tangentes dirigées vers le pôle, c'est-à-dire, des tangentes parallèles aux cordes divisées en parties égales. Si l'on mène les tangentes aux extrémités A, A′ d'une de ces cordes, elles concourent en un point du diamètre. Si AA′, BB′ sont deux des cordes divisées en parties égales, les droites AB, A′B′, ainsi que les droites AB′, A′B, se couperont sur le diamètre (186).

Réciproquement, si d'un point du diamètre on peut mener deux tangentes a, a' à la conique, la corde AA′ de contact sera divisée en parties égales par le diamètre; et si l'on mène par ce point une droite qui, avec le diamètre, sépare harmoniquement les deux tangentes, cette droite sera parallèle aux cordes coupées en deux. Si l'on mène deux couples de tangentes a et a', b et b' de deux points du diamètre, la droite qui joint les points ab, $a'b'$ et la droite qui joint les points ab', $a'b$ seront aussi parallèles aux cordes divisées en parties égales (187).

207. A tout point à l'infini, c'est-à-dire à tout faisceau de cordes parallèles, correspond un diamètre. Tous les diamètres passent par un même point, parce qu'ils sont les polaires des points d'une même droite, la droite de l'infini; le point de concours des diamètres est le pôle de la droite de l'infini (190).

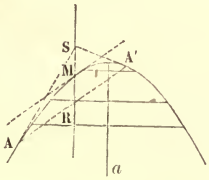
208. Comme la droite à l'infini est tangente à la parabole et que le point de contact est le pôle de cette droite (188), tous les diamètres de la parabole sont parallèles entre eux (ou dirigés vers le point de l'infini); et réciproquement toute droite qui coupe la parabole à l'infini est un diamètre.

209. Si S est un point quelconque d'où l'on peut mener deux tangentes a, a' à la conique (*fig.* 172), la corde de contact AA′, ou la polaire de S, sera divisée en deux parties égales en R par le diamètre qui passe par S; car S et le point à l'infini de AA′ sont des points réciproques. Si le diamètre coupe la courbe en M, M′, les tangentes en ces points sont

parallèles à AA′, et ces mêmes points sont séparés harmoniquement par le pôle S et la polaire AA′ (186).

Donc, si la conique est une parabole (*fig.* 173), auquel cas

Fig. 173.



le point M′ passe à l'infini, le point M sera le milieu du segment SR, ou :

La droite qui va du point milieu d'une corde de la parabole à son pôle est divisée en deux parties égales par la courbe (¹).

210. Quand la conique n'est pas une parabole, la droite à l'infini n'est plus une tangente de la courbe; par suite, le pôle de cette droite, ou le point de concours des diamètres, est un point à distance finie. Comme deux points de la conique en ligne droite avec le pôle sont toujours séparés harmoniquement par le pôle et par la polaire (186), le pôle est le point milieu des deux points de la courbe, quand la polaire est à l'infini. Donc toute corde de la conique qui passe par le pôle de la droite à l'infini est divisée en parties égales par ce point.

C'est à cause de cette propriété qu'on a donné le nom de *centre* de la conique au pôle de la droite à l'infini, ou au point de concours des diamètres.

En appliquant au centre et à la droite à l'infini les propriétés générales du pôle et de la polaire (186, 187), nous aurons (*fig.* 174) :

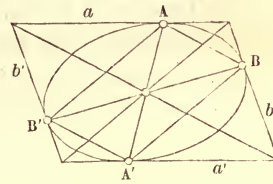
Si A, A′ sont deux points de la conique en ligne droite avec le centre, les tangentes en A, A′ sont parallèles;

Si AA′, BB′ sont deux couples de points de la conique alignés sur le centre, les droites AB, A′B′ sont parallèles, les

(¹) Apollonius, *loc. cit.*, liv. I, 35.

droites AB′, A′B sont aussi parallèles, et la figure ABA′B′ est un parallélogramme.

Fig. 174.



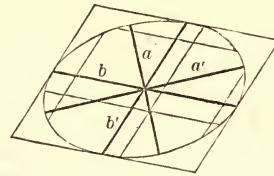
Si a, a' sont deux tangentes parallèles, leur corde de contact et la droite qui divise en deux parties égales la bande aa' passent par le centre.

Si aa', bb' sont deux couples de tangentes parallèles, la droite qui joint les points ab, $a'b'$ et la droite qui joint les points ab', $a'b$ passent par le centre; cela revient à dire que, si $aba'b'$ est un parallélogramme circonscrit, ses diagonales se coupent au centre.

211. Si la conique est une hyperbole, la droite à l'infini coupe la courbe; par suite, le centre est un point extérieur à la courbe (188) où concourent les tangentes aux points à l'infini, c'est-à-dire les asymptotes (*fig.* 181).

Si la conique est une ellipse, la droite à l'infini ne rencontre pas la courbe, par suite le centre est un point intérieur à la courbe (*fig.* 174, 175).

Fig. 175.



212. Deux diamètres de la conique [ellipse ou hyperbole (¹)]

(¹) Il n'y a pas de couples de diamètres conjugués dans la parabole, parce que, le centre étant un point à l'infini, le diamètre parallèle aux cordes divisées en parties égales par un diamètre donné coïncide toujours avec la droite de l'infini.

sont dits *conjugués* s'ils sont des droites réciproques, c'est-à-dire si le premier passe par le pôle du second et si, par conséquent, le second passe par le pôle du premier (189). Comme le pôle d'un diamètre est le point à l'infini des cordes qu'il coupe en parties égales, il s'ensuit que le diamètre conjugué b' d'un diamètre b est parallèle aux cordes divisées en parties égales par b; réciproquement, b' divise par moitié les cordes parallèles à b [1].

Deux diamètres conjugués et la droite à l'infini sont les côtés d'un triangle conjugué (192) dont le centre est un des sommets, et dont les deux autres sommets sont à l'infini.

Comme, dans un triangle conjugué, deux côtés coupent la courbe, tandis que le troisième ne la coupe pas (195), et comme la droite à l'infini est sécante pour l'hyperbole et ne l'est pas pour l'ellipse, il en résulte que, de deux diamètres conjugués de l'hyperbole, il y en a toujours un seul qui coupe la courbe, tandis que l'ellipse est coupée par tous ses diamètres.

213. Étant donnés cinq points A, B, C, D, E d'une conique, en trouver le centre.

Il suffit de répéter la construction donnée au n° 191, à droite, en supposant la droite s à l'infini. Il faudra trouver le point C′, où la conique est coupée pour la deuxième fois par la parallèle à AB menée par C, puis le point B′, où la conique est rencontrée de nouveau par la parallèle à AC qui passe par B; la droite u, qui joint les points de concours des côtés du quadrangle ACBC′, et la droite v, qui joint les points de concours des côtés opposés du quadrangle ABCB′, se couperont au point cherché O, pôle de la droite à l'infini, ou centre de la conique.

Les droites u, v sont les diamètres respectivement conjugués à AB, AC; en menant par O la droite u' parallèle à AB et la droite v' parallèle à AC, uu' et vv' seront deux couples de diamètres conjugués.

Si la conique est déterminée par cinq tangentes, on en trouvera le centre de la manière qui sera exposée plus loin (229).

214. Quatre tangentes à une conique forment un quadrilatère complet, dont les diagonales sont les côtés d'un triangle conjugué (194). Supposons que ces quatre tangentes soient

---

[1] Apollonius, *loc. cit.*, liv. II, p. 20.

parallèles deux à deux (*fig.* 174); une diagonale passera à l'infini; par suite, les deux autres sont des diamètres conjugués (212); donc :

Dans tout parallélogramme circonscrit à une conique, les diagonales sont deux diamètres conjugués.

Les points de contact des quatre tangentes forment un quadrangle complet dont les points diagonaux sont les sommets du triangle conjugué des n°s 132, 194. Pour ce quadrangle, un point diagonal est le centre, et les deux autres sont à l'infini; c'est-à-dire : les six côtés du quadrangle sont les côtés et les diagonales d'un parallélogramme inscrit; les côtés sont, deux à deux, parallèles aux diagonales du parallélogramme circonscrit, et les diagonales se coupent au centre.

215. Réciproquement, si nous imaginons (*fig.* 174) un parallélogramme inscrit quelconque ABA′B′ et si nous le considérons comme un quadrangle complet, comme ses trois points diagonaux doivent être les sommets d'un triangle conjugué, l'un d'eux sera le centre de la conique, et les deux autres seront les points à l'infini de deux diamètres conjugués; donc :

Dans tout parallélogramme inscrit à une conique, les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués, et les diagonales se coupent au centre. Ou :

Les deux cordes qui joignent un point variable A *d'une conique aux extrémités d'un diamètre fixe* BB′ *sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués.*

216. On conclut immédiatement du n° 214 que :

Deux tangentes parallèles (a, a') sont rencontrées par deux diamètres conjugués en quatre points qui, joints, donnent deux autres tangentes parallèles (b, b').

Si des extrémités (A, A′) d'un diamètre on mène des droites parallèles à deux diamètres conjugués, elles concourront en deux points de la courbe qui, joints entre eux, donneront un autre diamètre.

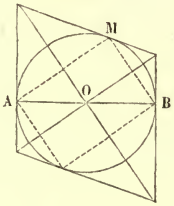
Étant données deux tangentes parallèles a, a', dont les points de contact soient A, A′ et une troisième tangente b; si du point A on mène la parallèle au diamètre qui passe par ab,

ces deux droites concourront au point B, où b est tangente à la conique.

Étant donnés deux tangentes parallèles a, a', leurs points de contact A, A′ et un autre point B de la conique, la tangente en B coupera a en un point situé sur le diamètre parallèle à A′B, et a' en un point situé sur le diamètre parallèle à AB.

217. Supposons maintenant que la conique soit un cercle (*fig.* 176), c'est-à-dire soit le lieu du sommet d'un angle droit

Fig. 176.



AMB dont les côtés AM, BM tournent autour de deux points fixes A, B. Ces côtés mobiles engendrent deux faisceaux égaux et, par suite, projectifs; donc la tangente en A sera le rayon du premier faisceau qui correspond au rayon BA du second (107). La tangente en A doit donc faire avec BA un angle droit; de même la tangente en B sera perpendiculaire à AB. Les tangentes en A et B étant parallèles, AB est un diamètre, et le point O, milieu de AB, est le centre du cercle (210).

Puisque AB est un diamètre, les droites AM, BM auront les directions de deux diamètres conjugués pour toutes les positions de M (215); donc :

Deux diamètres conjugués du cercle sont toujours perpendiculaires entre eux.

Comme les diagonales de tout parallélogramme circonscrit au cercle doivent être deux diamètres conjugués, elles se coupent sous un angle droit; donc *tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange.* Dans un losange, la distance de deux côtés opposés est égale à la distance des deux autres côtés; par suite, si dans le losange circonscrit nous

faisons varier deux côtés opposés en maintenant les deux autres fixes, nous voyons que la distance de deux tangentes parallèles est constante. La distance de deux tangentes parallèles est la droite qui joint leurs points de contact, car cette droite, qui est un diamètre, coupe le diamètre conjugué et les tangentes qui lui sont parallèles sous un angle droit; donc *tous les diamètres sont égaux.*

Les diagonales de tout parallélogramme inscrit sont des diamètres, mais ces diamètres sont tous égaux; donc *tous les parallélogrammes inscrits sont des rectangles.*

218. Quelle que soit la conique (*fig.* 172), si s est une droite arbitraire dont le pôle soit S, les cordes parallèles à s seront coupées en parties égales par le diamètre passant par S; car, S et le point à l'infini de s étant des points réciproques, la polaire du second point doit passer par le premier. Nous pouvons dire aussi :

Le diamètre conjugué à celui qui passe par un point donné est parallèle à la polaire de ce point.

I. Si le diamètre qui passe par S coupe la conique en deux points M, M′, ceux-ci seront séparés harmoniquement par le pôle S et la polaire s [1]; donc, O étant le point milieu de MM′, ou le centre de la conique, et R le point où ce diamètre coupe la polaire s, nous aurons (55)

$$OS.OR = \overline{OM}^2.$$

II. Il résulte de là une construction du demi-diamètre conjugué à la corde AA′ d'une conique dont on donne trois autres points. Trouvons le centre O (213) et joignons-le au point milieu R de AA′; puis construisons la tangente en A qui rencontre OR en S, et prenons OM moyenne proportionnelle entre OR, OS; OM sera le demi-diamètre cherché.

Si O se trouve entre R et S, de manière que OR et OS soient de signes opposés, le diamètre OR ne rencontre pas la courbe; mais, même dans ce cas, la longueur OM, moyenne proportion-

---

[1] Apollonius, *loc. cit.*, I, 34, 36; II, 29, 30.

nelle entre OR et OS, se nomme *grandeur du demi-diamètre* conjugué à la corde AA'.

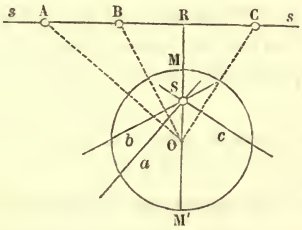
On peut donner une définition analogue pour une droite quelconque (223).

III. Si la conique est un cercle, nous aurons, à cause de l'orthogonalité des diamètres conjugués (217) :

La polaire d'un point quelconque par rapport au cercle est perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle.

219. On peut déduire un théorème très-important de cette dernière propriété. Considérons comme pôles (*fig.* 177) les

Fig. 177.



points A, B, C,... d'une droite ponctuelle *s*; les diamètres O(A, B, C,...) qui les projettent du centre O de la conique formeront un faisceau perspectif à la ponctuelle. Un autre faisceau est formé par les droites *a*, *b*, *c*, polaires de A, B, C,..., car ces dernières (190) passent toutes par un même point S, qui est le pôle de *s*, et comme, d'après la propriété ci-dessus (la conique étant un cercle), les droites O(A, B, C,...) sont respectivement perpendiculaires à *a*, *b*, *c*,..., les deux faisceaux sont égaux. La ponctuelle des pôles A, B, C,... est donc projective au faisceau des polaires *a*, *b*, *c*,....

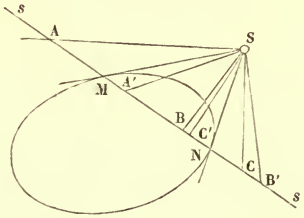
Cette conclusion est vraie non-seulement pour le cercle, mais aussi pour toutes les coniques. En effet, une conique quelconque donnée peut être considérée comme la projection d'un cercle (113, 114); dans la projection, les formes harmoniques correspondent à des formes harmoniques (43); par suite, à un point et à sa polaire par rapport à la conique correspondent un point et sa polaire par rapport au cercle, et

réciproquement à une ponctuelle de pôles et au faisceau des polaires par rapport à la conique correspondront une ponctuelle de pôles et le faisceau des polaires par rapport au cercle; mais cette ponctuelle et ce faisceau sont projectifs; donc :

La ponctuelle formée par un nombre quelconque de pôles en ligne droite et le faisceau des droites polaires, par rapport à une conique donnée, sont deux formes projectives (1).

220. Soient A, B, C,... des points d'une droite s (*fig.* 178); a, b, c,... leurs polaires, qui sont des droites passant par un

Fig. 178.



point fixe S, pôle de s; soient aussi A′, B′, C′,... les points où s est coupée par a, b, c,.... Comme A et A′ sont des points réciproques, la polaire de A′ passera par A, et ce sera précisément la droite SA, puisque S est réciproque de tout point de s. Le faisceau abc... (220) est projectif à la ponctuelle ABC... et perspectif à la ponctuelle A′B′C′...; donc ces deux ponctuelles sont projectives. Mais, dans ces deux ponctuelles, deux points, tels que A, A′, se correspondent doublement; en effet, si nous considérons A′ comme un point de la première ponctuelle, sa polaire (qui est SA) coupe la droite s au point A. Donc (93) les couples de points réciproques AA′, BB′, CC′,... sont en involution (2). Si l'involution a deux points doubles, chacun d'eux M sera un point réciproque à lui-même, c'est-à-dire tel, que sa polaire passe par le pôle lui-même; donc M

(1) Möbius, *loc. cit.*, p. 445.

(2) On suppose que s ne soit pas tangente à la conique. Si s était tangente, A, B, C,... étant des points arbitraires de cette droite, les points A′, B′, C′,... se confondraient tous avec le point de contact S.

sera (188) un point de la courbe, et SM sera la tangente en ce point.

Les couples de droites aa', bb', cc', ..., polaires des points AA′, BB′, CC′, constituent une involution, soit en vertu du théorème du n° 219, soit parce que ces droites proviennent de la projection de ces points du centre S; donc [1] :

Une droite donnée quelconque (non tangente à la conique) *renferme une infinité de couples de points réciproques qui constituent une involution.*

Si la droite coupe la conique, les deux intersections sont les points doubles de l'involution. Le point central de l'involution est situé sur le diamètre qui passe par le pôle de la droite donnée (218).

Par un point quelconque (non situé sur la conique) *passent une infinité de couples de droites réciproques qui constituent une involution.*

Si le point est extérieur à la courbe, les tangentes qui y passent sont les rayons doubles de l'involution; c'est-à-dire (96) : *Deux tangentes et deux droites réciproques issues d'un même point forment un faisceau harmonique.*

Si le point donné est à l'infini, on a une involution de droites parallèles, réciproques deux à deux, et son rayon central est un diamètre de la courbe (99).

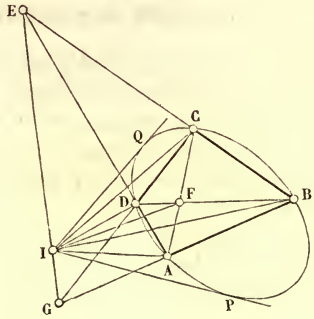
221. Soient ABCD un quadrangle simple, inscrit dans la conique (*fig.* 179); F l'intersection de ses diagonales AC, BD; E, G les points de concours des couples de côtés opposés : les points E, F, G seront ainsi des points réciproques deux à deux (193). D'un point quelconque I de EG menons les tangentes IP, IQ à la conique, et projetons, en outre, les sommets du quadrangle. Les deux tangentes sont séparées harmoniquement par IE, IF, car ces droites sont réciproques, puisque F est le pôle de IE (220). Les droites IE, IF forment aussi un groupe harmonique avec IA, IC, car la diagonale AC du quadrilatère complet fourni par les droites AB, BC, CD, DA est divisée harmoniquement par les deux autres diagonales BD, EG, et ces quatre rayons sont précisément ceux qui projettent les quatre points harmoniques de AC du centre F. Pour la même raison, les droites IE, IF séparent harmoniquement les droites IB, ID. Les deux tangentes, les

---

[1] Desargues, *loc. cit.*, p. 192-193.

droites IA, IC, les droites IB, ID sont donc trois couples de droites conjuguées d'une même involution, dont les rayons doubles sont IE, IF (96). Ou :

Fig. 179.

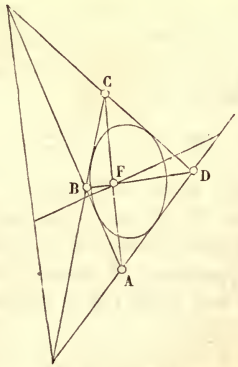


Si un quadrangle est inscrit dans une conique et si, d'un point de la droite qui joint les points de concours des couples de côtés opposés, on mène les tangentes à la courbe ; si, en outre, on projette de ce point les deux couples de sommets opposés, on a trois couples de droites conjuguées en involution.

I. En vertu du théorème corrélatif à celui de Desargues (143, à droite), on peut inscrire dans le quadrilatère ABCD une conique tangente aux deux droites IP, IQ.

II. Le théorème corrélatif de celui que nous venons de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Fig. 180.



Si un quadrilatère simple ABCD est circonscrit à une conique (*fig.* 180) et si l'on mène une transversale quelconque par le point commun à ses

diagonales, elle rencontre la courbe et les deux couples de côtés opposés AB et CD, BC et AD en trois couples de points conjugués en involution.

III. En vertu du théorème de DESARGUES (143, à gauche), on peut faire passer une conique par les deux points communs à la conique et à la transversale et par les quatre sommets du quadrilatère [1].

222. La théorie des points réciproques donne une solution du problème : Trouver les intersections, avec une droite donnée s, d'une conique déterminée par cinq points ou par cinq tangentes.

On prend deux points U et V sur s, on construit leurs polaires u, v (191), qui rencontrent s en U′ et V′. Si l'involution déterminée par les couples de points réciproques UU′, VV′ a deux points doubles M, N, ces points seront les intersections cherchées de la conique et de s [2].

On peut résoudre corrélativement le problème : Mener d'un point donné S les tangentes à la courbe déterminée par cinq tangentes ou par cinq points.

223. Soient A, A′ deux points réciproques situés sur la droite s; O le point où s rencontre le diamètre passant par le pôle S (le diamètre conjugué aux cordes parallèles à s) ; O sera le point central de l'involution formée sur s par les couples de points réciproques; par suite,

$$OA.OA' = \text{const. } (96).$$

Si s coupe la conique en deux points M, N, ces points seront les éléments doubles de l'involution, et l'on aura

$$OA.OA' = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2.$$

Si la droite s ne rencontre pas la courbe, la valeur constante de OA.OA′ sera négative (96); et, dans ce cas, il y a deux points conjugués de l'involution H, H′ ou deux points réciproques par rapport à la conique pour lesquels O est le point milieu, et l'on a

$$OA.OA' = OH.OH' = -\overline{OH}^2 = -\overline{OH'}^2.$$

Le segment HH′ est appelé alors *corde idéale* de la conique [3]; dans le premier cas, au contraire, MN est une corde réelle. On peut dire, d'après cette définition, qu'un diamètre renferme les points milieux de toutes les cordes réelles ou idéales, parallèles au diamètre conjugué.

Si deux coniques ont une corde réelle MN commune, cela veut dire

---

(1) CHASLES, *Sections coniques*, nos 122 et 126.

(2) STAUDT, *Geometrie der Lage*, no 305.

(3) PONCELET, *loc. cit.*, p. 29.

que l'une et l'autre passent par les points M, N. Si l'on dit, au contraire, que les deux coniques ont une corde idéale HH′ commune, cela signifie que les points H, H′ sont des points réciproques par rapport aux deux coniques, et que les diamètres des deux coniques qui renferment les pôles de HH′ passent tous les deux par le milieu de HH′....

224. Un faisceau de rayons en involution possède, en général (163), un couple de rayons conjugués orthogonaux; donc :

On peut toujours mener par un point quelconque un couple de droites réciproques orthogonales qui sont les bissectrices des angles des tangentes issues du point donné, si celui-ci est extérieur à la courbe.

225. Au lieu du point quelconque S, prenons maintenant le centre O de la conique (hyperbole ou ellipse); deux droites réciproques seront deux diamètres conjugués; donc (220) :

Les couples de diamètres conjugués forment une involution. Si la conique est une hyperbole, les asymptotes sont les rayons doubles de l'involution; cela veut dire que *deux diamètres conjugués de l'hyperbole sont toujours séparés harmoniquement par les asymptotes* (¹). Si la conique est une ellipse, l'involution n'a pas de rayons doubles.

Considérons dans une involution deux couples d'éléments conjugués; l'un des couples est ou n'est pas séparé par l'autre, et, par suite, l'involution a ou n'a pas d'éléments doubles (98); donc :

De deux couples de diamètres conjugués de l'ellipse, l'un aa′ est toujours séparé par l'autre bb′ (*fig.* 175);

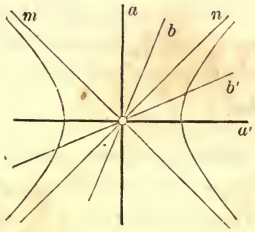
De deux couples de diamètres conjugués de l'hyperbole, l'un aa′ n'est jamais séparé par l'autre bb′ (*fig.* 181).

226. L'involution des diamètres conjugués aura (224) un couple de diamètres conjugués rectangulaires. S'il y en avait un second couple, tout diamètre serait perpendiculaire à son conjugué (163), et dans ce cas, en faisant mouvoir sur la courbe le sommet d'un angle dont les côtés passent par les extrémités fixes d'un diamètre, cet angle serait toujours droit (215); par suite, la conique serait un cercle.

(¹) De Lahire, *loc. cit.*, liv. II, p. 13, cor. 4.

Donc toute conique qui n'est ni une parabole ni un cercle a un seul couple de diamètres conjugués rectangulaires. On donne le nom d'*axes* à ces deux diamètres *aa'* (*fig.* 175 et 181). Dans l'hyperbole, les axes *aa'* sont (225, 52) les bissectrices des angles des asymptotes *m*, *n* (*fig.* 181).

Fig. 181.



En considérant un axe comme un diamètre qui divise en parties égales les cordes qui lui sont perpendiculaires, la parabole possède aussi un axe. En effet, les cordes perpendiculaires à la direction commune de tous les diamètres étant parallèles entre elles ont leurs points milieux sur une droite (206), qui est l'axe *a* de la parabole (*fig.* 162).

227. Soient donnés cinq points d'une conique, on pourra construire le centre O comme il est dit au n° 213, et deux couples de diamètres conjugués *uu'*, *vv'*. Si l'un des couples est séparé par l'autre, la conique sera une ellipse; dans le cas contraire, ce sera une hyperbole (225). Dans ce second cas, en construisant les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples *uu'*, *vv'*, ces rayons doubles seront les asymptotes de la courbe.

Dans l'un et l'autre cas, en construisant (163) les rayons conjugués orthogonaux de l'involution, on aura les axes de la conique.

On peut aussi trouver la direction des axes sans construire d'abord le centre et les couples de diamètres conjugués [1]. Pour cela, il faut décrire le cercle ABC et construire (176, I) le quatrième point C' d'intersection de cette courbe avec la conique déterminée par les cinq points donnés A, B, C, F, G (*fig.* 156). Une transversale quelconque coupera les deux courbes et les couples de côtés opposés du quadrangle inscrit commun

---

[1] Poncelet, *loc. cit.*, n° 394.

ABCC′ en des points formant des couples en involution (143). Les points doubles P, Q de cette involution, s'ils existent, seront réciproques (96, 220) par rapport à chacune des deux courbes, c'est-à-dire formeront le couple commun (164) aux deux involutions formées sur la transversale par les points réciproques relatifs au cercle et par les points réciproques relatifs à la conique (220). Imaginons que nous prenions pour transversale la droite à l'infini : comme cette droite ne coupe pas le cercle, une de ces deux involutions, au moins, n'aura pas de points doubles, et, par conséquent (164), les points P, Q existent réellement. Ces points étant à l'infini, et réciproques par rapport aux deux courbes, seront (206, 212) les pôles de deux diamètres conjugués du cercle et aussi de deux diamètres conjugués de la conique; mais les diamètres conjugués du cercle sont orthogonaux (217) : donc P, Q sont les pôles des axes de la conique. Les mêmes points P, Q sont aussi séparés harmoniquement par chacun des couples de côtés opposés du quadrangle ABCC′; il s'ensuit que P, Q sont les points à l'infini des bissectrices des angles de chaque couple de côtés opposés (52). Il résulte de là que, pour obtenir les directions cherchées des axes, il suffit de tracer les bissectrices d'un couple de côtés opposés du quadrangle ABCC′, du couple AB, CC′, par exemple (*fig.* 156).

228. Supposons que l'on ait un quadrilatère complet *qrst* et un point quelconque S (*fig.* 149). On a déjà vu (145, à droite) que, dans l'involution déterminée par les couples de rayons *aa′*, *bb′*, qui projettent de S deux couples de sommets opposés, les tangentes menées de S à une conique quelconque inscrite au quadrilatère sont conjuguées. Supposons que l'involution ait deux rayons doubles *m*, *n*; ils sépareront harmoniquement ce couple de tangentes (96), et, par suite, ces rayons doubles seront (220) des droites réciproques par rapport à la conique. Donc (170, à droite) :

Si deux coniques inscrites dans un quadrilatère donné passent par un point donné, leurs tangentes en ce point sont réciproques par rapport à toutes les coniques inscrites dans le même quadrilatère.

Au lieu de prendre arbitrairement un point S, nous pouvons supposer que l'on donne la droite *m*; si cette droite ne passe par aucun des sommets du quadrilatère, il n'existera qu'une seule conique tangente aux cinq droites *m*, *q*, *r*, *s*, *t* (116). Soit S le point où cette conique touche *m*; il passera par S une autre conique inscrite au quadrilatère, soit *n* sa tangente en S. Les

droites m, n seront donc réciproques par rapport à toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère, ce qui veut dire (189) que :

Les pôles d'une droite quelconque m par rapport à toutes les coniques inscrites dans un même quadrilatère sont situés sur une autre droite n.

I. Comme les droites m, n sont les rayons doubles de l'involution où les rayons menés de S à deux sommets opposés sont conjugués, les droites m, n divisent harmoniquement chaque diagonale du quadrilatère.

II. Les propositions corrélatives sont :

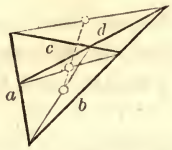
Si une droite est tangente à deux coniques circonscrites à un même quadrilatère, les deux points de contact sont réciproques par rapport à toutes les coniques circonscrites au même quadrilatère.

Les droites polaires d'un point donné M, par rapport à toutes les coniques circonscrites à un même quadrangle, concourent en un point fixe N. Les deux points M, N séparent harmoniquement chaque couple de côtés opposés du quadrangle complet.

III. Supposons, dans le premier théorème, que la droite m soit à l'infini ; les pôles de m seront les centres des coniques (210) ; donc :

Les centres de toutes les coniques inscrites dans un même quadrilatère sont en ligne droite (*fig.* 182) ; *cette droite passe par les milieux des diagonales du quadrilatère* [1].

Fig. 182.



IV. Supposons aussi que le point M soit à l'infini dans le second théorème ; les polaires de M seront (206) les diamètres conjugués de ceux dont le point à l'infini est M ; donc :

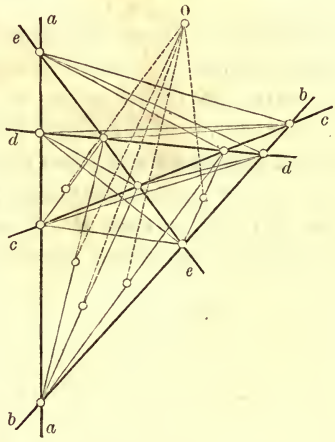
---

[1] NEWTON, *loc. cit.*, liv. I, lemme 25, cor. 3.

Les diamètres de toutes les coniques circonscrites à un quadrangle fixe qui sont conjugués à un diamètre de direction donnée concourent en un point fixe.

229. Le théorème de Newton (228) donne un moyen simple pour trouver le centre d'une conique donnée par cinq tangentes a, b, c, d, e (*fig.* 183). Les quatre tangentes a, b, c, d forment un quadrilatère ; joignons

Fig. 183.



les milieux de ses diagonales ; opérons de même sur le quadrilatère *abce* ; les deux nouvelles droites obtenues concourront au centre cherché O.

Les cinq tangentes, prises quatre à quatre, donnent cinq quadrilatères ; les cinq droites qui passent par les milieux des diagonales de chaque quadrilatère concourront donc toutes au centre O de la conique inscrite dans le pentagone *abcde*.

Le même théorème sert à déterminer la direction du diamètre de la parabole déterminée par quatre tangentes a, b, c, d. En effet, le point à l'infini de la droite qui renferme les points milieux des diagonales du quadrilatère *abcd* sera le pôle de la droite à l'infini par rapport à une conique inscrite au même quadrilatère (228) : ce sera donc le point à l'infini de la parabole inscrite. Cette droite des points milieux est donc elle-même un diamètre de la parabole (*fig.* 182).

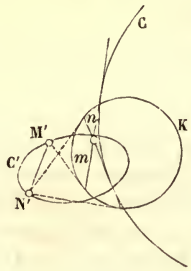
§ XXII. — Figures polaires réciproques.

230. Nous avons déjà vu (190) que, une conique fondamentale **K** étant donnée, si un pôle variable décrit une droite, sa polaire tourne autour d'un point déterminé, et que, réciproquement, si une droite considérée comme polaire tourne autour d'un point fixe, son pôle parcourt une droite déterminée.

Considérons maintenant comme polaires toutes les tangentes d'une courbe donnée **C**, ou bien imaginons que la droite polaire se meuve en *enveloppant* la courbe donnée. Son pôle décrira une autre courbe que nous désignerons par **C**′. Les points de **C**′ sont donc les pôles des tangentes de **C**.

Réciproquement, je dis que les points de **C** sont les pôles des tangentes de **C**′. En effet, soient M′, N′ deux points de **C**′ (*fig.* 184); leurs polaires m, n seront deux tangentes de **C**, et

Fig. 184.



le point mn sera le pôle de la corde M′N′ (190). Supposons que le point N′ se rapproche indéfiniment de M′; la corde M′N′ se rapprochera indéfiniment de la position de la tangente de **C**′ en M′; la droite n deviendra de plus en plus voisine de la position de m, et le point mn tendra vers le point où m est tangente à **C**. Quand la distance M′N′ sera devenue infiniment petite, la tangente de **C**′ en M′ sera la polaire du point de contact entre m et **C**. Donc, de même que les tangentes de **C** sont les polaires des points de **C**′, les tangentes de **C**′ sont les po-

laires des points de C; si une droite m est tangente à C en M, le pôle M′ de m est un point de C′, et la polaire m' de M est tangente à C′ en M′.

Les deux courbes C, C′, dont chacune est en même temps le lieu des pôles des tangentes de l'autre et l'enveloppe des polaires des points de l'autre, sont dites *polaires réciproques* (1).

231. Une droite quelconque r rencontre une des deux courbes réciproques en μ points; les polaires de ces points sont autant de tangentes à l'autre courbe issues du pôle R′ de r. La seconde courbe a donc autant de tangentes issues d'un point donné R′ qu'il y a d'intersections de la première courbe et de la droite r, polaire de R′, et réciproquement.

232. Supposons maintenant que C soit une conique; soient a et b deux de ses tangentes; elles seront rencontrées par toutes les autres tangentes c, d, e,..., en des points correspondants de deux ponctuelles projectives (113). Cela revient à dire que nous considérons C comme l'enveloppe des droites c, d, e,... qui joignent les points correspondants de deux ponctuelles projectives a et b (114).

La courbe C′ contiendra les pôles A′, B′, C′, D′, E′,... des tangentes a, b, c, d, e,... de C. Les droites A′(C′, D′, E′,...) seront les polaires des points $a(c, d, e,...)$ et formeront un faisceau projectif à la ponctuelle a des pôles; de même, les droites B′(C′, D′, E′,...) seront les polaires des points $b(c, d, e,...)$ et formeront un faisceau projectif à la ponctuelle b des pôles (219). Mais les deux ponctuelles $a(c.d.e...)$, $b(c.d.e...)$ sont projectives; donc les faisceaux A′(C′.D′.E′...), B′(C′.D′.E′...) sont aussi projectifs. Il résulte de là que C′ est le lieu des points communs aux rayons correspondants de deux faisceaux projectifs; ou bien (114) :

La courbe polaire réciproque d'une conique est une autre conique (2).

---

(1) Poncelet, *loc. cit.*, n° 232.
(2) Poncelet, *loc. cit.*, n° 231.

233. Étant données une conique fondamentale K et une autre conique C dont on veut déterminer la polaire réciproque C′, on peut demander si C′ sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole. La droite à l'infini est la polaire du centre O de K; par suite, les points à l'infini de C′ correspondront aux tangentes de C issues de O. Il résulte de là que la conique C′ sera une ellipse ou une hyperbole, suivant que le point O sera intérieur ou extérieur à la conique C; C′ sera une parabole si O est un point de C.

Si A est le pôle d'une droite a par rapport à C, et si a', A′ sont la polaire de A et le pôle de a par rapport à K, A′ sera le pôle de a' par rapport à C′, parce qu'à un groupe harmonique de quatre pôles correspond un groupe harmonique de quatre polaires (219), et réciproquement. Donc le centre M′ de C′ sera le pôle par rapport à K de la droite m, qui est la polaire de O par rapport à C. Deux diamètres conjugués de C′ correspondront à deux points de m réciproques par rapport à C, etc.

234. Supposons que l'on donne dans le plan de la conique fondamentale une *figure* (1) ou complexe quelconque de points, droites et courbes; construisons la droite polaire de chaque point, le pôle de chaque droite et la courbe polaire réciproque de chaque courbe. Nous obtenons ainsi une nouvelle figure, et les deux figures sont dites *polaires réciproques*, parce que chacune d'elles renferme les pôles des droites de l'autre, les polaires des points de l'autre, et les courbes polaires des courbes de l'autre.

Deux figures polaires réciproques sont des figures *corrélatives*, suivant le principe de dualité dans la Géométrie plane (27); car à tout point de l'une correspond une droite de l'autre, à toute ponctuelle de la première correspond un faisceau dans la seconde. De plus, elles sont situées dans un même plan, leurs positions y sont déterminées, mais échangeables l'une avec l'autre, parce que chaque point de l'une et la droite correspondante de l'autre sont liés par la condition d'être pôle et polaire par rapport à une conique fixe. Au contraire, deux figures corrélatives conçues d'après le prin-

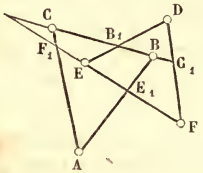
cipe de dualité seul n'ont entre elles aucune relation de position [1].

235. De deux figures polaires réciproques, si l'une contient une ponctuelle (de pôles), l'autre renferme un faisceau (de polaires), et ces deux formes correspondantes sont projectives (219). Par suite, si les points de la ponctuelle forment des couples en involution, les rayons du faisceau correspondant jouiront de la même propriété, et aux points doubles de la première involution correspondront les rayons doubles de la seconde (95). S'il y a une conique dans l'une des figures, il y aura aussi une conique dans l'autre (232); aux points de la première conique correspondront les tangentes de la seconde, et aux tangentes de la première les points de la seconde; aux polygones inscrits dans l'une des figures les polygones circonscrits dans l'autre (230). Si la première figure exprime la démonstration d'un théorème ou la solution d'un problème, la seconde exprimera la démonstration du théorème corrélatif ou la solution du problème corrélatif en faisant l'échange entre les éléments *point* et *droite*.

236. *Théorème.* — Les sommets de deux triangles conjugués à une conique sont des points d'une seconde conique, et leurs côtés sont tangents à une troisième conique [2].

Soient ABC, DEF deux triangles conjugués, tous les deux (192), à la conique fondamentale **K** (*fig.* 185); je commencerai par démontrer que deux des six côtés coupent les quatre autres en deux groupes projectifs de quatre points.

Fig. 185.



Le côté BC rencontre DE, DF en B_1, C_1, et le côté EF rencontre AB, AC

(1) Steiner, *loc. cit.*, p. vii de la préface.
(2) Steiner, *loc. cit.*, p. 308. — Chasles, *loc. cit.*, n° 215.

en E_1, F_1. Les points B, C sont les pôles des droites CA, AB; le point B_1 étant commun à BC, DE a pour polaire la droite AF, qui joint leurs pôles; de même C_1, point commun à BC, DF, a pour polaire AE. Le groupe des quatre pôles B, C, B_1, C_1 est donc projectif (219) au groupe des quatre polaires A(C, B, F, E); il est donc aussi projectif au groupe F_1E_1FE des points où ces quatre droites sont coupées par la transversale EF. On a ainsi

$$(BCB_1C_1) = (F_1E_1FE)$$

ou (56)

$$(BCB_1C_1) = (E_1F_1EF),$$

égalité qui prouve précisément la projectivité des deux groupes de quatre points où les droites BC, EF sont coupées par AB, CA, DE, FD. Ces six droites, c'est-à-dire les six côtés des triangles proposés, sont donc (146) tangentes à une même conique **C**.

Les pôles de ces six droites sont les six sommets des mêmes triangles; donc (232) ces six sommets sont des points d'une même conique **C'** qui est la polaire réciproque de **C** par rapport à la conique fondamentale **K**.

I. On peut exprimer ce théorème en disant que la conique **C**, tangente à cinq des six côtés de deux triangles conjugués à une même conique **K**, est aussi tangente au sixième côté; et la conique déterminée par cinq sommets passe aussi par le sixième.

On conclut de là que, si une conique **C** est tangente aux côtés d'un triangle *abc* conjugué à une autre conique **K**, il y a une infinité d'autres triangles conjugués à cette dernière courbe qui sont circonscrits à la première. En effet, soit *d* une tangente quelconque de **C**; du point D, pôle de *d* par rapport à **K**, imaginons que nous menions une autre tangente *e* à **C**; et soit *f* la polaire, par rapport à **K**, du point *de* : *def* sera un triangle conjugué à **K** (193). Comme **C** est déjà tangente à cinq côtés *a*, *b*, *c*, *d*, *e* de deux triangles conjugués à **K**, elle sera aussi tangente au sixième côté *f*; ce qu'il fallait démontrer. Si l'on peut mener deux tangentes e', f' à **K** du point D, les quatre droites e, f, e', f' formeront un groupe harmonique, parce que les droites e, f sont réciproques par rapport à **K** (220); donc les droites e', f' seront réciproques par rapport à **C**.

Le lieu du point D est la conique **C'**, polaire réciproque de **C** par rapport à **K**; donc :

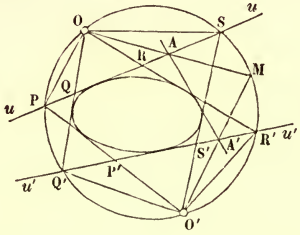
Si une conique **C** est inscrite dans un triangle conjugué à une autre conique **K**, le lieu d'un point d'où l'on peut mener un faisceau harmonique de quatre tangentes aux deux coniques est une troisième conique **C'**, polaire réciproque de **C** par rapport à **K**.

II. Corrélativement, nous pourrons dire aussi que, si une conique **C'** passe par les sommets d'un triangle conjugué à une autre conique **K**, elle sera aussi circonscrite à une infinité d'autres triangles conjugués à la même

conique **K**; et les droites qui coupent **C'** et **K** en deux couples de points conjugués harmoniques sont toutes tangentes à une même conique **C**, polaire réciproque de **C'** par rapport à **K**.

237. Je considère une conique **C** et deux triangles circonscrits OQ'R', O'PS (*fig.* 186). Les deux tangentes PS, Q'R'

Fig. 186.



sont rencontrées par les quatre autres côtés O'P, OQ', OR', O'S en deux groupes correspondants PQRS, P'Q'R'S' de deux ponctuelles projectives u, u' (113). Par suite, les groupes de rayons O(P, Q, R, S), O'(P', Q', R', S') qui projettent ces points de O, O' respectivement sont aussi projectifs. Donc les points P, Q', R', S, où se coupent les rayons correspondants, sont situés (114) sur une conique **C'** qui passe par les centres de projection; cela veut dire que :

Si deux triangles sont circonscrits à une conique, ils sont aussi inscrits dans une autre conique.

Si, au contraire, nous partons de la considération de la conique **C'** et des triangles inscrits OQ'R', O'PS, nous démontrerons d'une manière tout à fait analogue (corrélative) le théorème corrélatif et inverse du précédent :

Si deux triangles sont inscrits dans une conique, ils sont aussi circonscrits à une autre conique [1].

I. De là il résulte immédiatement que :

La conique qui passe par cinq sommets de deux triangles circonscrits à une autre conique passe aussi par le sixième sommet.

La conique qui est tangente à cinq côtés de deux triangles inscrits à une autre conique est aussi tangente au sixième côté.

[1] Brianchon, *loc. cit.*, p. 35. — Steiner, *loc. cit.*, p. 173.

Ou bien :

Si deux coniques sont telles que l'on puisse inscrire dans l'une un triangle qui soit circonscrit à l'autre, il y a une infinité d'autres triangles qui jouissent de la même propriété (¹).

II. Dans la figure, nous avons quatre formes projectives : les deux ponctuelles u, u', qui déterminent les tangentes de la conique **C** et les deux faisceaux O, O′, qui déterminent les points de **C**′; le faisceau O est perspectif à la ponctuelle u, et de même le faisceau O′ est perspectif à la ponctuelle u'. Donc, si une tangente quelconque de **C** coupe u, u' en A, A′, les rayons OA, OA′ concourront en un point M de **C**′; et, réciproquement, si un point M de **C**′ est projeté des centres O, O′, les rayons projetants rencontreront u, u' en deux points A, A′ d'une même tangente de **C**. Donc :

Si deux côtés d'un triangle variable AA′M tournent autour de deux points fixes O, O′ d'une conique donnée, pendant que les sommets opposés parcourent deux droites u, u', et le troisième sommet la conique ci-dessus, le troisième côté restera constamment tangent à une conique déterminée, tangente aux deux droites u, u'.

Si deux sommets d'un triangle variable AA′M parcourent deux droites u, u' tangentes à une conique donnée, tandis que les côtés opposés tournent autour de deux points fixes O′, O, et que le troisième côté reste tangent à la conique ci-dessus, le troisième sommet parcourra une conique déterminée qui passe par les points O, O′.

238. Soit un triangle TRS dont les côtés RS, ST, TR (*fig.* 112) sont coupés par une transversale en A′, B′, C′, et supposons que les polaires de ces points par rapport à une conique donnée **K** (qui n'est pas tracée dans la figure) rencontrent la même transversale aux points A, B, C. Les trois couples de points réciproques AA′, BB′, CC′ seront en involution (220); par suite (103), les droites TA, RB, SC concourront en un point Q. Supposons, en outre, le point T réciproque de A′, et le point R réciproque de B′; cela veut dire que les polaires de A′, B′ (par rapport à la conique donnée) sont TA, RB; le point Q commun à ces polaires sera, par conséquent, le pôle

(¹) Poncelet, *loc. cit.*, n° 565.

de la transversale A′B′. Or C′ est un point de cette droite et est réciproque à C; sa polaire sera QC; mais QC passe par S: donc S et C′ sont des points réciproques. Si nous considérons maintenant le quadrilatère complet formé par la transversale et les côtés du triangle TRS, nous pourrons conclure le théorème :

Si les extrémités (T, A′), (R, B′) *de deux diagonales d'un quadrilatère complet forment deux couples de points réciproques par rapport à une conique donnée, les extrémités* (S, C′) *de la troisième diagonale sont aussi réciproques par rapport à la même conique* (¹).

I. Le théorème corrélatif peut servir d'exercice aux élèves :

Si deux couples de côtés opposés d'un quadrangle complet sont formés par des droites réciproques par rapport à une conique, les deux autres côtés sont aussi des droites réciproques par rapport à la même conique.

Pour obtenir ce quadrangle complet, il suffit de prendre la figure polaire réciproque du quadrilatère considéré dans le théorème de Hesse, c'est-à-dire la figure formée par les polaires des six points (T, A′), (R, B′), (S, C′).

II. La proposition suivante est un corollaire du théorème que nous venons de démontrer :

Deux triangles réciproques par rapport à une conique sont homologiques (²).

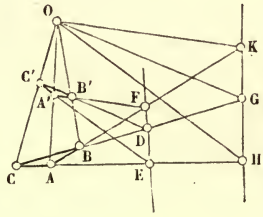
Soit ABC un triangle (*fig.* 187); les polaires des sommets par rapport à la conique donnée forment un autre triangle A′B′C′, réciproque du premier; c'est-à-dire que les côtés du premier sont aussi les polaires des sommets du second. Soient E le point de concours des côtés CA, C′A′, et F le point de concours de AB, A′B′. Les points B et E sont réciproques, car E est situé sur C′A′, polaire de B; de même, les points C et F sont réciproques. Dans le quadrilatère formé par les droites BC, CA, AB, EF, nous avons donc deux couples de sommets opposés BE, CF qui sont des pôles réciproques par rapport à la

(¹) Hesse, *De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis* (*Dissertatio pro venia legendi*. Regiomonti, 1840), p. 17.

(²) Chasles, *loc. cit.*, n° 135.

conique donnée; par suite, les deux autres sommets jouissent de la même propriété : le point A et l'intersection des droites BC, EF sont réciproques. La polaire de A, qui est B′C′, passe donc par le point D commun à BC et EF; en d'autres termes,

Fig. 187.



les couples de côtés opposés des deux triangles ABC, A′B′C′ se coupent en trois points en ligne droite D, E, F. Il résulte de là (15) que les droites qui joignent les sommets AA′, BB′, CC′ concourent en un point O, pôle de DEF.

III. En combinant ce théorème avec celui du n° 118, on peut énoncer la propriété suivante :

Si deux triangles sont réciproques par rapport à une conique **K**, les six points où les côtés de l'un coupent les côtés non correspondants de l'autre sont sur une conique **C**, et les six droites qui joignent les sommets de l'un aux sommets non correspondants de l'autre sont tangentes à une autre conique **C′**, qui est la polaire réciproque de **C** par rapport à **K** (232) [1]; ces six droites sont, en effet, les polaires des six points ci-dessus par rapport à **K**.

Si des deux triangles l'un A′B′C′ est inscrit dans l'autre ABC, les trois coniques se confondent en une seule qui est circonscrite au premier et inscrite au second triangle (137, 139).

IV. Étant donnés deux triangles homologiques ABC, A′B′C′, on demande de construire la conique par rapport à laquelle ils sont réciproques. Pour obtenir les points où cette conique rencontre la droite BC, par exemple, il suffit de remarquer que ces points sont les éléments doubles de l'invo-

---

[1] J'appelle correspondants le côté BC d'un des triangles, par exemple, et le côté B′C′ de l'autre qui est opposé au pôle A′ de BC, etc.

lution dans laquelle B est conjugué à l'intersection de BC et de C'A', et C est conjugué à l'intersection de BC et de A'B' (220). Comme les points A', B sont les pôles des droites BC, C'A', ces points et l'intersection de ces deux droites seront les sommets d'un triangle conjugué (192). Si donc il arrive qu'en cherchant les intersections de la conique et des droites BC, C'A', comme nous venons de le faire, on trouve deux involutions sans éléments doubles, il faudra en conclure que la conique n'existe pas; car, si elle existait réellement, deux côtés du triangle conjugué devraient la rencontrer (195).

Le centre d'homologie O des deux triangles donnés (*fig.* 158) est le pôle de l'axe d'homologie DEF; et la correspondance projective (219) entre les points (pôles) de l'axe et les rayons (les polaires) issus du centre d'homologie est déterminée par les trois couples d'éléments correspondants : D et AA', E et BB', F et CC'; par suite, on pourra construire linéairement (66) la polaire (ou le pôle) de n'importe quel autre point de l'axe (de n'importe quel autre rayon issu de O).

Ce que nous venons de dire pour le point O et pour l'axe d'homologie peut se répéter pour un sommet quelconque d'un des triangles et pour sa polaire, qui est le côté correspondant de l'autre triangle. En effet, si l'on considère, par exemple, le sommet A' et le côté BC, la correspondance projective entre les rayons issus de A' et les points de BC est déterminée par les trois couples d'éléments correspondants : A'B' et C, A'C' et B, A'O et D.

Ceci admis, on peut aussi construire linéairement la polaire d'un point quelconque P, ou le pôle d'une droite quelconque p. En effet, si P est donné, nous savons déjà construire les pôles des droites PO, PA, PB, PC, PA',..., qui sont tous sur une ligne droite X, la polaire cherchée de P Si l'on donne, au contraire, la droite p, les polaires des points où elle rencontre BC, CA,... concourent en un point, qui est le pôle de p.

Remarquons que toutes ces déterminations de pôles et de polaires sont linéaires (du premier degré) et indépendantes de la construction de la conique fondamentale, qui est, au contraire, un problème du second degré, puisqu'elle se réduit à la recherche des éléments doubles d'une involution. La construction des pôles et des polaires est donc toujours possible, même quand la conique fondamentale n'existe pas. C'est-à-dire : Les deux triangles homologiques proposés déterminent, entre les points et les droites du plan, une correspondance réciproque telle, qu'à chaque point correspond une droite, à chaque droite correspond un point, aux rayons d'un faisceau correspondent les points d'une ponctuelle projective au faisceau, et réciproquement. Convenons d'appeler *pôle* et *polaire* un point quelconque et la droite qui lui correspond, et *système polaire* cet ensemble de pôles et de polaires qui possède toutes les propriétés de celui qui est déterminé par une conique fondamentale (188).

Deux triangles homologiques déterminent donc un système polaire. S'il existe une conique fondamentale, elle est le lieu des pôles situés sur leurs polaires respectives et aussi l'enveloppe des droites qui passent par leurs pôles respectifs. S'il n'y a pas de conique fondamentale, c'est qu'il n'existe aucun point situé sur sa propre polaire [1].

§ XXIII. — Corollaires et constructions.

239. Supposons, dans le théorème du n° 205, que les sommets B et C du triangle inscrit ABC soient les points à l'infini de l'hyperbole; alors S (*fig.* 171) sera le centre de la courbe, et le théorème deviendra celui-ci :

Si d'un point A de l'hyperbole on mène les parallèles aux asymptotes, elles rencontreront un diamètre quelconque en deux points réciproques F, G. Ou bien :

Si, par deux points réciproques en ligne droite avec le centre de l'hyperbole, on mène les parallèles aux asymptotes, elles se couperont sur la courbe.

On conclut de là un moyen de construire l'hyperbole par points quand on donne les asymptotes et un point M. Sur la droite SM qui joint le point S d'intersection des asymptotes au point M, on prendra deux points conjugués de l'involution déterminée par le point central S et le point double M : ces points sont réciproques par rapport à la conique (220); par suite, en y faisant passer des parallèles aux asymptotes, les deux sommets du parallélogramme résultant seront des points de la courbe à construire.

240. Appliquons de la même manière à l'hyperbole le théorème du n° 204, en supposant que les côtés b, c du triangle inscrit abc soient les asymptotes :

Si l'on mène deux droites parallèles (f, g) quelconques par les points où les asymptotes sont coupées par une tangente quelconque de l'hyperbole, ces droites sont réciproques. Ou :

Deux droites réciproques parallèles coupent les asymptotes en deux points qui appartiennent à une même tangente de l'hyperbole.

On déduit de là une règle pour construire les tangentes d'une hyperbole dont on donne les asymptotes b, c et une tangente m. Pour cela, il suffit de mener parallèlement à m deux droites conjuguées de l'involution (99) déterminée par le diamètre parallèle à m comme rayon central

---

[1] Staudt, *loc. cit.*, n° 241.

et par m comme rayon double. Ces deux droites conjuguées sont réciproques par rapport à la conique; par suite, en joignant les points où elles coupent les asymptotes, on aura une tangente de la courbe.

241. Soient B et C deux points quelconques d'une parabole, et A le point où la courbe est coupée par le diamètre qui passe par le milieu de BC. Soient F, G deux points réciproques, situés sur ce diamètre, c'est-à-dire deux points équidistants de A (106); en vertu du théorème du n° 205, les droites BF, CG, comme aussi les droites BG, CF, concourront sur la courbe.

De là résulte une construction par points de la parabole circonscrite à un triangle ABC et ayant pour diamètre la droite menée de A au point milieu de BC.

Soient H, H′ deux points réciproques pris sur la corde BC, c'est-à-dire deux points séparés harmoniquement par BC. Comme les points H, H′ sont en ligne droite avec le pôle du diamètre qui passe par A, en appliquant le théorème du n° 205, nous aurons un point de la parabole à l'intersection de AH avec le diamètre qui passe par H′ (et un autre à l'intersection de AH′ avec le diamètre passant par H). Cela donne un autre moyen de construire par points la parabole, qui satisfait aux conditions données ci-dessus.

242. Supposons que c soit à l'infini dans le théorème du n° 204; nous aurons :

Si a et b sont deux tangentes d'une parabole et si, par un point quelconque du diamètre conjugué à a, nous traçons deux droites réciproques, dont l'une passe par le point ab, l'autre sera parallèle à b, et réciproquement.

Nous avons ainsi une manière de construire par tangentes la parabole dont on donne deux tangentes a, t, le point de contact A de a et la direction des diamètres. Menons par A le diamètre, il rencontrera t en O; l'autre tangente t' menée par O sera la droite qui est séparée harmoniquement de t par le diamètre OA et la parallèle à a. Tirons par O deux droites réciproques, c'est-à-dire deux droites qui séparent harmoniquement t et t'; la parallèle à h', menée par le point ha, et la parallèle à h, menée par le point $h'a$, seront tangentes à la parabole cherchée.

243. Supposons, dans le théorème du n° 204, que a soit la droite à l'infini et que b et c soient deux tangentes à la parabole, nous aurons :

Les droites parallèles à deux tangentes à la parabole, menées par un point de la corde de contact, sont réciproques.

Donc, en appliquant le même théorème, nous aurons encore :

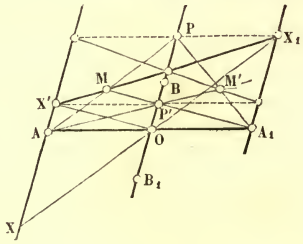
Si par un point de la corde de contact de deux tangentes b, c à une

parabole, on mène deux droites, h parallèle à b et h' parallèle à c, la droite qui joint les points hc, h'b sera une tangente à la courbe (¹).

De là un moyen de construire les tangentes à la parabole déterminée par deux tangentes et leurs points de contact.

244. Supposons, dans le théorème du n° 205, que le triangle inscrit soit AA_1M, c'est-à-dire qu'il ait deux sommets A, A_1 en ligne droite avec le centre O de la conique (ellipse ou hyperbole, *fig.* 188); le pôle du côté AA_1 sera le point à l'infini

Fig. 188.



commun aux cordes divisées en parties égales par le diamètre AA_1. Ce théorème (205) devient donc :

Les droites menées de deux points réciproques P, P' *aux extrémités* A, A_1 *du diamètre, dont le conjugué est parallèle à* PP', *concourent sur la conique.*

I. Les couples de points réciproques, analogues à PP', pris sur le diamètre conjugué à AA_1, forment une involution (220), dont le point central est le centre O de la conique. Si cette involution a deux éléments doubles B, B_1, ces points appartiennent à la courbe, qui est, par conséquent, une ellipse. Si l'involution n'a pas de points doubles, la conique est une hyperbole (212); on peut alors trouver deux points B, B_1, conjugués de l'involution, et par suite réciproques par rapport à la conique, dont le point milieu est O (96). Dans l'un et dans l'autre cas, on entend par *longueur* du diamètre conjugué à AA_1 le segment BB_1 (218, 223).

(¹) De la Hire, *loc. cit.*, liv. III, p. 21.

On a pour l'ellipse (223)

$$OP.OP' = \text{const.} = \overline{OB}^2 = \overline{OB_1}^2,$$

et pour l'hyperbole

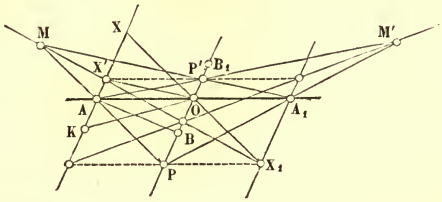
$$OP.OP' = \text{const.} = OB.OB_1 = -\overline{OB}^2 = -\overline{OB_1}^2.$$

II. Le théorème précédent nous donne le moyen de résoudre le problème :

Construire par points la conique dont on donne deux diamètres conjugués AA_1, BB_1 en grandeur et en position.

Dans le cas de l'ellipse (*fig.* 188), les quatre points A, A_1, B, B_1 appartiennent à la courbe ; dans le cas de l'hyperbole (*fig.* 189), soit AA_1 le diamètre qui coupe la conique.

Fig. 189.



Construisons sur le diamètre BB_1 plusieurs couples de points PP' conjugués dans l'involution dont O est le point central, et dont B, B_1 sont les points doubles dans le premier cas, ou des points conjugués dans le second. Les rayons AP, A_1P' (ainsi que les rayons A_1P, AP') se couperont sur la courbe.

III. Les droites OX, OX' menées parallèlement à AP, AP' sont deux diamètres conjugués (215). Les diamètres conjugués forment une involution (225) ; par suite, les couples de points analogues à X, X' (où les diamètres rencontrent la tangente en A) forment une involution dont le point central est A, parce que OA et la droite OB, parallèle à AX, sont deux diamètres conjugués. Si la conique est une hyperbole, l'involution des diamètres conjugués a deux rayons doubles qui sont les asymptotes ; donc les points K, K_1, où AX rencontre les asymptotes, sont les points doubles de l'involution XX'....

Un seul des points K, K_1 est marqué dans la *fig.* 189.

IV. Des triangles égaux OPA, AXO on tire $AX = -OP$, et des triangles égaux $OP'A_1$, $AX'O$ on tire de même $AX' = OP$ [1]; mais on a

$$OP.OP' = \pm \overline{OB}^2, \quad \text{donc} \quad AX.AX' = \mp \overline{OB}^2.$$

Ou bien :

Le rectangle des segments que deux diamètres conjugués déterminent sur une tangente fixe, à partir du point de contact, est constamment égal au carré $(\mp \overline{OB}^2)$ *du demi-diamètre parallèle à la tangente fixe.*

V. Dans le cas de l'hyperbole, les points K, K_1 sont les éléments doubles de l'involution dont A est le point central et les points X, X' deux points conjugués; donc

$$AX.AX' = \overline{AK}^2 = \overline{OB}^2; \quad \text{par suite,} \quad AK = OB.$$

Cela veut dire que la figure OAKB est un parallélogramme; ou l'on peut dire :

Si l'on construit un parallélogramme sur deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole, une des diagonales est une asymptote et l'autre est parallèle à la seconde asymptote [2].

Pour voir que AB est parallèle à la seconde asymptote, il suffit de considérer le faisceau harmonique (225) formé par les deux asymptotes et les deux diamètres conjugués OA, OB, et la transversale AB. Le point d'intersection de l'une des asymptotes et de la transversale est le point milieu de AB; le point d'intersection de l'autre sera donc à l'infini (51).

VI. Soit X_1 le point où le diamètre OX rencontre la tangente au point A_1. Comme OX', OX_1 sont deux droites réciproques qui passent par un point de la corde de contact AA_1 des tangentes AX, A_1X_1, la droite $X'X_1$ (204) sera une tangente de la conique.

---

(1) Pour se rendre compte des signes, il suffit d'observer que, dans le cas de l'ellipse, OP, OP' ont le même sens, tandis que AX, AX' sont de sens opposés; dans le cas de l'hyperbole OP et OP' sont opposés, AX et AX' sont de même sens.

(2) Apollonius, *loc. cit.*, liv. II, p. 1.

Le point de contact de cette tangente est M, point commun aux droites AP, A_1P' (224).

VII. Observons encore que $X'X_1$ est une diagonale du parallélogramme formé par les tangentes A, A_1 et par les parallèles à AA_1 menées par P, P'; on arrive aussi à ce résultat de la manière suivante. Les points d'un diamètre ont pour polaires des parallèles au diamètre conjugué (212); donc, P et P' étant deux points réciproques, si l'on mène par ces points des parallèles à AA_1, la première sera la polaire de P', la seconde la polaire de P; par suite, ces parallèles sont réciproques. Si nous appliquons maintenant le théorème du n° 204 à ces droites réciproques et aux deux tangentes en A et A_1, nous obtenons la propriété suivante :

Si deux côtés opposés d'un parallélogramme sont tangents à une conique et si les deux autres côtés sont des droites réciproques parallèles au diamètre conjugué aux deux premiers côtés, les diagonales sont aussi des tangentes à la conique.

VIII. On obtient ainsi la solution suivante du problème :

Construire par tangentes la conique dont on donne deux diamètres conjugués AA_1, BB_1 en grandeur et en direction.

Supposons que BB_1 soit le diamètre qui est coupé par la conique, dans le cas où cette courbe est une hyperbole; déterminons sur cette droite un couple de points P, P' conjugués dans l'involution qui a pour point central le centre O de la courbe et les points B, B_1 pour points doubles ou pour points conjugués, suivant qu'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole. Tirons par A, A_1 des parallèles à BB_1, et par P, P' des parallèles à AA_1; les diagonales du parallélogramme ainsi obtenu seront des tangentes à la conique cherchée.

IX. Les segments AX, A_1X_1 sont égaux et opposés; mais nous avons vu que

$$AX.AX' = \mp \overline{OB}^2, \quad \text{donc} \quad AX'.A_1X_1 = \pm \overline{OB}^2,$$

ou bien :

Le rectangle des segments qu'une tangente variable ($X'X_1$) *détermine sur deux tangentes parallèles fixes, à partir de*

leurs points de contact, est constamment égal au carré $\pm\overline{OB}^2$ *du demi-diamètre parallèle aux tangentes fixes* (1).

X. Comme la droite OB divise en parties égales la bande comprise entre AX et A_1X_1, les segments que AM, A_1M déterminent respectivement sur A_1X_1, AX (à partir de A_1, A) sont doubles de OP, OP′; mais, d'après le théorème I, nous avons

$$OP.OP' = \text{const.}$$

Donc :

Les droites menées des extrémités d'un diamètre donné à un point quelconque de la conique déterminent sur les tangentes conjuguées au diamètre deux segments (à partir des points de contact), *dont le produit est constant* (2).

XI. Le point X étant (216) celui où la tangente en A coupe la tangente parallèle à $X'X_1$, l'énoncé IV peut s'exprimer ainsi :

Le rectangle des segments (AX, AX′) *que deux tangentes parallèles variables déterminent sur une tangente fixe est constamment égal au carré* $(\mp\overline{OB}^2)$ *du demi-diamètre parallèle à la tangente fixe.*

XII. Le théorème du n° 224 sert aussi à résoudre le problème :

On donne les deux extrémités A, A_1 du diamètre d'une conique, un troisième point M et la direction du diamètre conjugué à AA_1 : trouver la longueur du second diamètre.

Menons par O, point milieu de AA_1, le diamètre dont on donne la direction; il est coupé en P, P′ par AM, A_1M; prenons OB moyenne proportionnelle entre OP, OP′ : OB sera la moitié de la longueur cherchée.

XIII. Le théorème IV donne une construction des couples de diamètres conjugués et, en particulier, des axes d'une ellipse dont on donne en grandeur et en direction deux demi-diamètres conjugués OA, OB (*fig.* 190). Menons par A la parallèle à OB : cette droite sera la tangente en A, et deux diamètres conjugués quelconques la couperont en deux points X, X′, tels que l'on aura

$$AX.AX' = -\overline{OB}^2.$$

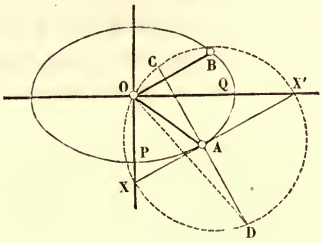
Donc, si nous prenons sur la normale en A deux segments AC, AD égaux

(1) *Voir* n° 123.

(2) Apollonius, *loc. cit.*, liv. III, p. 53.

à OB, tout cercle décrit par C et D coupera cette tangente en deux points X, X′ doués de cette propriété, c'est-à-dire en deux points qui,

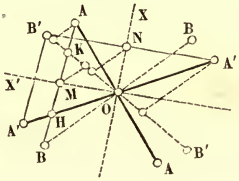
Fig. 190.



joints au centre O, donneront les directions de deux diamètres conjugués. Si l'on fait passer le cercle par O, l'angle XOX′ sera droit; par suite, OX, OX′ seront les directions des axes [1].

245. Par les extrémités A, A′ (*fig.* 191) de deux demi-diamètres conjugués OA, OA′ d'une conique, menons, dans une

Fig. 191.



direction arbitraire, deux cordes parallèles AB, A′B′ [2]. Pour construire les points B, B′, il suffit de joindre les pôles de ces cordes : on obtiendra ainsi le diamètre OX, qui renferme leurs milieux.

Soit OX′ le diamètre conjugué à OX, c'est-à-dire le diamètre parallèle aux cordes AB, A′B′. Les groupes de quatre rayons O(X, X′, A, B), O(X′, X, A′, B′) sont harmoniques (51) et, par

---

[1] Chasles, *Aperçu historique* p. 45 et 362; *Sections coniques*, n° 205.

[2] Dans le cas où la conique est une hyperbole, si A est un point de la courbe, A′ sera l'extrémité d'un diamètre idéal défini comme aux n°s 218-223. Dans ce cas A′B′ sera une corde idéale.

suite, projectifs; donc les couples de rayons O(XX'.AA'.BB') sont en involution (94); mais les couples O(XX'.AA') déterminent l'involution des diamètres conjugués (98, 225); donc OB, OB' sont deux diamètres conjugués. Ou bien :

Si l'on mène deux cordes parallèles AB, A'B' *par les extrémités* A, A' *de deux demi-diamètres conjugués, les points* B, B' *seront les extrémités de deux autres demi-diamètres conjugués.*

Deux diamètres AA, BB déterminent quatre cordes AB qui sont les côtés d'un parallélogramme (194, 215). Les diamètres respectivement conjugués A'A', B'B' donnent, de la même manière, un autre parallélogramme dont les côtés sont parallèles à ceux du premier, c'est-à-dire que toute corde AB est parallèle à deux cordes A'B', et n'est pas parallèle à deux autres cordes A'B'.

I. Soient H et K les points où AB est coupée par les droites OA', OB'; le diamètre OX, qui divise A'B' en parties égales, passera aussi par le milieu de HK : AB et HK ont donc le même point milieu, et AH = KB et AK = HB. Les triangles OAK, OBH sont donc équivalents [1]; de même, les triangles AKB', BHA' et, par suite, les triangles OAB', OA'B sont aussi équivalents. Ou :

Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres (OA, OB') *est équivalent au parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres respectivement conjugués.*

On démontre de la même manière l'équivalence des triangles OAB, OA'B'.

Les triangles AHA', BKB' sont équivalents pour la même raison; les triangles OAH, OBK et, par suite, les triangles OAA', OBB' le sont aussi; ou bien :

Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués a une aire constante [2].

II. Soient M, N les points milieux des cordes non parallèles AB, A'B'. Comme (215) AB, A'B' ont les directions de deux diamètres conjugués, et comme ON est le diamètre conjugué

---

[1] Baltzer, *Planim.*, p. 101.

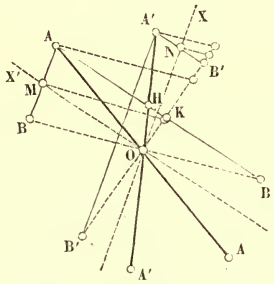
[2] Apollonius, *loc. cit.*, liv. VII, p. 31-32.

à la corde A′B′, ON sera parallèle à AB; de même, OM et A′B′ sont parallèles: les angles OMA, ONA′ sont donc égaux ou supplémentaires; comme, en outre, les triangles OMA, ONA′ sont équivalents, comme égaux à la moitié des triangles équivalents OAB, OA′B′, nous aurons l'égalité

$$OM.AM = \pm ON.NA' \text{ (}^1\text{)}.$$

Projetons maintenant (*fig.* 192) les points A, M, B, A′, N, B′ du point à l'infini de OB sur la droite B′B′. Le rapport des

Fig. 192.



segments parallèles AM et ON, OM et NA′ est égal à celui de leurs projections; on déduira donc de l'égalité ci-dessus que le rectangle des projections de OM, AM est égal au rectangle des projections de ON, NA′. Comme les rayons projetants sont parallèles à OB, les projections de OM, MA sont l'une et l'autre égales à la moitié de la projection de BA ou à celle de OA. N étant le point milieu de A′B′, la projection de ON sera la demi-somme des projections de OA′, OB′, et la projection de NA′ sera la moitié de la projection de A′B′, c'est-à-dire la demi-différence des projections de OA′, OB′. On a donc

$$(\text{proj.}\,OA)^2 = \pm\,\text{proj.}(OA' + OB') \times \text{proj.}(OB' - OA')$$

ou

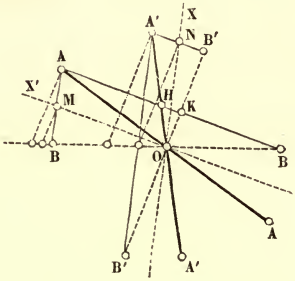
$$(\text{proj.}\,OA')^2 \pm (\text{proj.}\,OA)^2 = (\text{proj.}\,OB')^2.$$

---

(1) Le double signe, motivé par la direction relative des segments OM, NA′ et des segments ON, AM, correspond au cas de l'ellipse (*fig.* 191) et à celui de l'hyperbole (*fig.* 192).

De la même manière, si l'on projetait ces mêmes points sur OB, au moyen de rayons parallèles à OB′ (*fig.* 193), on

Fig. 193.



obtiendrait

$$(\text{proj.}\,OA)^2 \pm (\text{proj.}\,OA')^2 = (\text{proj.}\,OB)^2.$$

Ce qui revient à dire :

Si deux demi-diamètres conjugués quelconques sont projetés sur un diamètre fixe, au moyen de rayons parallèles au diamètre conjugué à ce dernier, la somme (pour l'ellipse) ou la différence (pour l'hyperbole) des carrés des projections est constamment égale au carré du demi-diamètre fixe.

La somme des carrés des projections orthogonales d'un segment sur deux droites perpendiculaires entre elles est égale au carré du segment d'après le théorème de Pythagore [1]; donc, si deux diamètres conjugués sont projetés orthogonalement sur l'un des deux axes de la conique, et si l'on fait la somme des carrés des projections de chaque diamètre sur les deux axes, on obtient le théorème suivant :

La somme (pour l'ellipse) ou la différence (pour l'hyperbole) des carrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques est constante; elle est toujours égale à la somme des carrés des demi-axes [2].

246. Supposons que les côtés BC, CA, AB d'un triangle

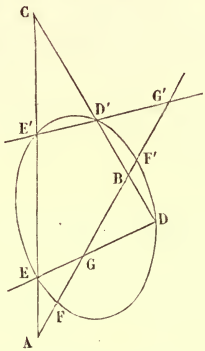
---

[1] Baltzer, *Planim.*, p. 104.

[2] Apollonius, *loc. cit.*, liv. VII, p. 12, 13, 22, 25.

(*fig.* 194) coupent une conique aux couples de points DD′, EE′, FF′. Regardons ce triangle comme coupé par les transver-

Fig. 194.



sales DE, D′E′ aux points DD′, EE′, GG′; le théorème de Ménélaus (104) nous donnera les égalités

$$\frac{BD}{CD}\,\frac{CE}{AE}\,\frac{AG}{BG}=1,\qquad \frac{BD'}{CD'}\,\frac{CE'}{AE'}\,\frac{AG'}{BG'}=1.$$

Le quadrangle DEE′D′ est inscrit dans la conique; la transversale AB coupe ses côtés opposés et la conique en trois couples de points qui sont en involution, d'après le théorème de Desargues (143); nous aurons donc (100) l'égalité des rapports anharmoniques

$$(ABFG)=(BAF'G'),$$

d'où

$$(ABFG)=(ABG'F')\quad\text{ou}\quad(ABFG):(ABG'F')=1,$$

ce qui revient à

$$\frac{AF.AF'}{BF.BF'}:\frac{AG.AG'}{BG.BG'}=1.$$

En multipliant entre elles ces trois égalités, on trouve

$$(1)\qquad \frac{BD.BD'}{CD.CD'}\cdot\frac{CE.CE'}{AE.AE'}\cdot\frac{AF.AF'}{BF.BF'}=1.$$

Cette relation exprime un théorème célèbre dû à Carnot [1].

I. Réciproquement, si l'on a, sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle, trois couples de points DD′, EE′, FF′, et si les segments déterminés par ces points et par les sommets satisfont à la relation (1), ces six points appartiennent à une même conique. Décrivons, en effet, la conique déterminée par les cinq points D, D′, E, E′, F, et soit F″ le point où elle coupera de nouveau AB. Nous aurons alors, en vertu du théorème de Carnot, une relation qui différera de la relation (1) en ce que le point F′ sera remplacé par F″. Cette relation, combinée avec (1), donne

$$AF' : BF' = AF'' : BF'',$$

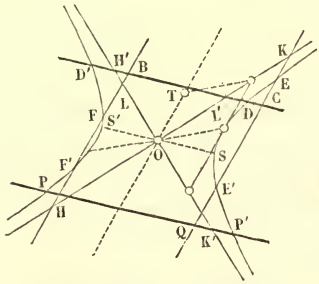
d'où

$$(ABF'F'') = 1 \quad \text{ou} \quad (F''F'BA) = 1;$$

donc (57) F′ et F″ coïncident.

II. Si le point A s'éloigne à l'infini (*fig.* 195), les rapports

Fig. 195.



AF : AE, AF′ : AE′ tendent vers l'unité; par suite, l'équation (1) devient dans ce cas

$$(2) \qquad \frac{BD.BD'}{CD.CD'}\,\frac{CE.CE'}{BF.BF'} = 1.$$

Menons parallèlement à BC une droite qui coupe CEE′ en Q et la conique en PP′; la formule précédente, appliquée aux

---

[1] *Géométrie de position*, p. 437.

transversales DD′, PP′, donnera

$$\frac{QE.QE'}{CE.CE'}\,\frac{CD.CD'}{QP.QP'}=1,$$

et, en multipliant entre elles ces deux dernières équations, nous aurons

$$\frac{BD.BD'}{BF.BF'}=\frac{QP.QP'}{QE.QE'},$$

c'est-à-dire que :

Si par un point quelconque (Q) *on mène deux transversales à une conique dans des directions données, le rapport des produits des segments* (QP.QP′ : QE.QE′) *déterminés par la courbe, à partir du point commun aux transversales, est constant* (¹).

III. Supposons dans la formule (2) que la conique soit une hyperbole, et, au lieu de BC, prenons une asymptote HK de la courbe : le rapport HD.HD′ : KD.KD′ sera égal à l'unité; par suite,

$$HF.HF'=KE.KE',$$

ou bien :

Si par un point quelconque H (ou H′) d'une asymptote on mène, parallèlement à une droite donnée, une transversale qui coupe l'hyperbole en deux points F, F′ (ou D, D′), le rectangle des segments HF.HF′ (ou H′D.H′D′) est constant.

Si le diamètre parallèle à la direction donnée H′D rencontre la courbe en deux points S, S′, O étant le centre, nous aurons

$$H'D.H'D'=OS.OS'=-\overline{OS}^2.$$

Si le diamètre OT parallèle à la direction donnée HF ne coupe pas la courbe, on pourra mener une tangente qui lui soit parallèle; le carré de la portion de cette parallèle comprise entre l'asymptote et le point de contact sera égal à HF.HF′, en vertu du théorème dont nous nous occupons; mais cette por-

(¹) Apollonius, *loc. cit.*, liv. III, p. 16-23. — Desargues, *loc. cit.*, p. 202. — De la Hire, *loc. cit.*, liv. V, p. 10, 12.

tion est égale au demi-diamètre parallèle OT (244); donc $HF.HF' = \overline{OT}^2$, ou :

Si une droite coupe l'hyperbole en F, F′ (*en* D, D′) *et une asymptote en* H (*en* H′), *le produit* HF.HF′ (*le produit* H′D.H′D′) *est égal à* ± *le carré du demi-diamètre* OT (OS) *parallèle à la sécante, en prenant le signe* + *ou le signe* —, *suivant que la courbe a ou n'a pas de tangentes parallèles à la sécante.*

IV. Si la sécante coupe l'autre asymptote en L (en L′), nous aurons (151)

$$HF' = FL \quad \text{ou} \quad H'D' = DL',$$

par suite aussi

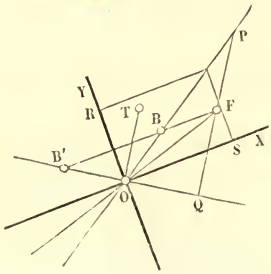
$$FH.FL = -\overline{OT}^2 \quad \text{ou} \quad DH'.DL' = \overline{OS}^2;$$

donc :

Si une droite menée par un point F (D) *d'une hyperbole coupe ses asymptotes en* H, L (*en* H′, L′), *le produit* FH.FL (DH′.DL′) *est égal à* ∓ *le carré du demi-diamètre parallèle à la sécante* (— ou + suivant que la courbe a ou n'a pas de tangentes parallèles à la sécante).

V. On déduit de là une manière de construire les axes d'une hyperbole, dont on donne, en grandeur et en direction, deux demi-diamètres conjugués OF, OT (*fig.* 196). Commençons par construire les asymptotes. Pour

Fig. 196.



cela, si OF est le diamètre qui doit couper la courbe, menons par F la parallèle à OT; ce sera la tangente en F; puis prenons sur cette droite FP et QF égales à OT; les droites OP, OQ seront les asymptotes (244).

Maintenant, pour obtenir les directions OX, OY des axes, il suffira de trouver les bissectrices des angles des asymptotes, ou les deux rayons conjugués orthogonaux de l'involution dont les rayons doubles sont OP, OQ (225, 226).

Menons par F la parallèle à OX, elle coupe les asymptotes en B, B'; prenons sur OX le segment OS moyen proportionnel entre FB, FB'; OS sera la longueur du demi-axe dirigé suivant OX, qui coupera ou ne coupera pas la courbe, suivant que les segments FB, FB' auront ou n'auront pas le même sens. Enfin, construisons le parallélogramme dont un côté est OS, dont un autre côté est dirigé suivant OY et dont la diagonale se confond avec une asymptote; le côté OR donnera la longueur de l'axe dirigé suivant OY (244).

VI. Supposons que l'on ait deux points O, O' dans le plan d'un triangle ABC; les droites OA, OB, OC rencontrent respectivement les côtés opposés BC, CA, AB en D, E, F; le théorème de Ceva (104) nous donne

$$\frac{BD}{CD}\,\frac{CE}{AE}\,\frac{AF}{BF} = -1.$$

De même, si O'A, O'B, O'C rencontrent les côtés opposés en D', E', F', nous aurons

$$\frac{BD'}{CD'}\,\frac{CE'}{AE'}\,\frac{AF'}{BF'} = -1.$$

En multipliant ces équations entre elles, nous trouvons la relation (1); donc :

Si l'on projette de deux points quelconques les sommets d'un triangle sur les côtés respectivement opposés, on obtient six points situés sur une même conique.

Par exemple, les points milieux des côtés d'un triangle et les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets opposés sur les mêmes côtés sont six points d'une conique [1].

247. *Problème.* — Construire une conique qui passe par trois points donnés A, B, C, et par rapport à laquelle les points conjugués d'une involution donnée sur une droite u soient des points réciproques (*fig.* 197).

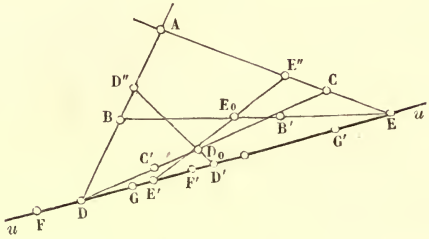
Les droites AB, AC rencontrent u en D, E. Soient D', E' les conjuguées de ces points dans l'involution donnée. Soient ensuite D'' le point qui est séparé harmoniquement de D par A et B; E'' le point qui est séparé harmoniquement de E par A et C. Alors le point D est réciproque à l'un et à

---

[1] Cette conique est un cercle. *Voir* Steiner, t. XIX des *Annales de Mathématiques* (Montpellier, 1828), p. 42.

l'autre des points D′, D″ : la droite D′D″ sera donc la polaire de D; de même, E′E″ sera la polaire de E.

Fig. 197.

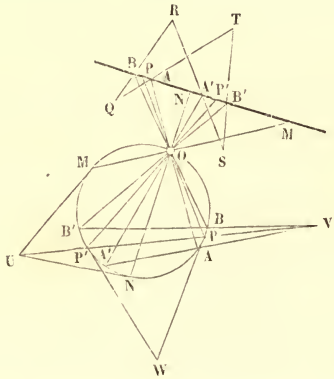


Traçons les droites BE, CD jusqu'à leurs intersections respectives avec E′E″, D′D″ en E_0, D_0 : le premier de ces points sera réciproque à E, le second à D. Par suite, si l'on construit les points B′, C′, de manière que les groupes BB′EE_0, CC′DD_0 soient harmoniques, les points B′, C′ appartiendront à la courbe demandée.

Dans la figure, les couples FF′, GG′ sont les points qui déterminent sur *u* l'involution donnée de points réciproques.

248. *Problème.* — Construire la conique qui passe par quatre points donnés Q, R, S, T et qui divise harmoniquement un segment donné MN (*fig.* 198).

Fig. 198.



La droite MN coupe les couples de côtés opposés du quadrangle QRST en A et A′, B et B′. Si la conique cherchée rencontre MN en deux points,

ces points formeront un couple de l'involution déterminée par AA′, BB′ (143). Par conséquent, si l'involution dont les points doubles sont M, N et l'involution déterminée par les couples AA′, BB′ ont un couple commun PP′, la conique cherchée passera par chacun des points P, P′ (96, 164).

Pour construire ces points, décrivons un cercle quelconque (164), et d'un de ses points O projetons sur la circonférence les points A, A′, B, B′, M, N en A_1, A'_1, B_1, B'_1, M_1, N_1 (¹). Si V est le point commun aux droites $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ et si U est le point commun aux tangentes en M_1, N_1, les droites qui passent par U et les droites qui passent par V déterminent sur la circonférence et, par suite (au moyen de projections faites à partir de O), sur la droite MN les couples de points conjugués de l'une et de l'autre involution. Si la droite UV rencontre le cercle en deux points, il suffira de les projeter à partir de O pour avoir les points cherchés P, P′.

Soit W le pôle de UV par rapport au cercle. Toute droite passant par W et coupant le cercle détermine sur celui-ci et, par suite, sur MN, deux points séparés harmoniquement par P, P′, c'est-à-dire deux points réciproques par rapport à la conique cherchée. Donc, si UV ne coupe pas le cercle, c'est-à-dire si l'on ne peut pas construire les points P, P′, nous tirerons par W deux droites qui coupent le cercle; du point O nous projetterons les points d'intersection sur la droite MN : nous obtiendrons ainsi deux couples de points qui détermineront l'involution de points réciproques par rapport à la conique. Le problème sera ainsi ramené à celui que nous avons traité au numéro précédent.

249. *Problème.* — Construire la conique qui passe par quatre points donnés Q, R, S, T et par deux points conjugués (non donnés) d'une involution donnée sur une droite u.

Ce problème est analogue au précédent, car il s'agit de construire le couple de points conjugués commun à l'involution donnée et à celle qui est déterminée sur u par les couples de côtés opposés du quadrangle QRST (143). Le couple cherché existe réellement si l'involution donnée n'a pas de points doubles, et les points qui le forment appartiennent à la conique cherchée. Si l'involution donnée a deux points doubles M, N, le problème dont nous nous occupons se confond absolument avec celui du n° 248.

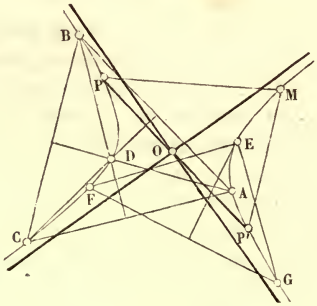
Ce problème et les deux précédents n'admettent évidemment qu'une seule solution.

250. Considérons une hyperbole dont les asymptotes soient

(¹) *Voir* la note de la page 158.

orthogonales (*fig.* 199). Comme les asymptotes séparent harmoniquement deux diamètres conjugués quelconques (225),

Fig. 199.



les angles des deux diamètres conjugués ont les asymptotes pour bissectrices (52); mais les deux demi-diamètres conjugués sont les côtés d'un parallélogramme dont les diagonales ont la direction des asymptotes (244) : ce parallélogramme sera donc un losange; en d'autres termes, *tout diamètre est égal à son conjugué*. C'est cette propriété qui a fait donner à l'hyperbole que nous considérons le nom d'hyperbole *équilatère* ([1]).

I. Comme les droites menées d'un point quelconque M de la courbe aux extrémités P, P′ d'un diamètre ont les directions de deux diamètres conjugués (215), les angles que les droites PM, P′M font avec chacune des asymptotes sont égaux et de sens opposé. Si les points P, P′ restent fixes, tandis que M parcourt la courbe, les rayons PM, P′M décrivent deux faisceaux inversement égaux (80).

II. Réciproquement, les rayons correspondants de deux faisceaux inversement égaux se coupent en des points dont le lieu est une hyperbole équilatère. Ce lieu est une conique, puisque les deux faisceaux sont projectifs (78). Ces faisceaux ont chacun deux rayons perpendiculaires entre eux, qui sont respectivement parallèles aux rayons correspondants de l'autre fais-

([1]) Apollonius, *loc. cit.*, liv. VII, p. 21. — De la Hire, *loc. cit.*, liv. V, p. 13.

ceau (80); donc la conique a deux points à l'infini, situés sur deux directions orthogonales et est, par conséquent, une hyperbole équilatère. Les centres P, P′ des deux faisceaux sont les extrémités d'un diamètre; en effet, la tangente p en P est le rayon correspondant à la droite P′P regardée comme un rayon p' du second faisceau, et la tangente q' en P′ correspond à PP′ considérée comme un rayon q du premier faisceau (114); mais les angles pq, $p'q'$ doivent être égaux et opposés; donc, p' et q étant une seule et même droite, les tangentes p, q' sont parallèles.

III. Les sommets d'un triangle ABC et le point D commun à ses hauteurs sont les sommets d'un quadrangle complet où chaque côté est perpendiculaire au côté opposé, et dont les six côtés déterminent sur la droite de l'infini trois couples de points qui sont projetés d'un centre arbitraire S par trois couples de droites orthogonales. Ces trois couples appartiennent donc à une involution dans laquelle tout rayon est perpendiculaire à son conjugué (101, à gauche, 95, 163).

Mais cette involution de rayons projette à partir de S l'involution de points qui, d'après le théorème de Desargues (143), est marquée sur la droite à l'infini par les couples de côtés opposés du quadrangle et par les coniques (hyperboles) [2] qui lui sont circonscrites. Donc les couples de rayons conjugués de la première involution donnent les directions des asymptotes de ces coniques; ou bien :

Toutes les coniques qui passent par les sommets et par le point de concours des hauteurs d'un triangle sont des hyperboles équilatères.

IV. Réciproquement, si l'on fait passer une hyperbole équilatère par les sommets A, B, C d'un triangle, elle passera nécessairement par le point de rencontre D de leurs hauteurs. En effet, imaginons une autre hyperbole déterminée (125) par les quatre points A, B, C, D et par un des points à l'infini de l'hyperbole donnée; elle sera équilatère en vertu du théorème qui précède, et, par suite, elle passera par le second point à

---

[1] Il n'y a ni ellipse ni parabole circonscrite au quadrangle en question (nº 170).

l'infini de la courbe donnée. Les deux hyperboles ont ainsi cinq points communs (A, B, C et deux points à l'infini) : donc elles se confondent ; ce qu'il fallait démontrer. Donc :

Dans tout triangle inscrit à une hyperbole équilatère, le point de rencontre des hauteurs est sur la courbe.

V. Si le point D se rapproche indéfiniment de A, c'est-à-dire si l'angle BAC devient droit, nous aurons :

Dans tout triangle rectangle EFG (*fig.* 184) *inscrit dans une hyperbole équilatère, la tangente au sommet* E *de l'angle droit est perpendiculaire à l'hypoténuse.*

VI. Il ne passe qu'une seule hyperbole équilatère par quatre points donnés Q, R, S, T (249). Le point de rencontre des hauteurs de chacun des triangles QRS, RST, STQ, QRT appartient à la courbe [1].

251. Supposons que l'on ait une conique, un point S et sa polaire s. Une droite passant par S rencontre la conique en A, A'. Si l'on veut construire la figure homologique à la conique donnée (18), en prenant S comme centre d'homologie, s comme axe d'homologie et A' comme point correspondant à A, tout autre point B' correspondant à un point B de la conique sera situé sur la conique même. En effet, si AB rencontre s en P, le point B' commun à SB, A'P est un point de la courbe (186). Donc la courbe homologique à la conique donnée sera cette conique elle-même. Deux points (ou deux droites) correspondants sont séparés harmoniquement par S et s [2].

A la droite à l'infini correspondra donc la droite j parallèle à s et équidistante de s et de S ; et les points où j rencontre la conique correspondront aux points à l'infini de la même conique.

On conclut de là une règle assez simple pour reconnaître si un arc donné de conique, quelque petit qu'il soit, appartient à une ellipse, à une parabole ou à une hyperbole. Traçons une corde s de l'arc et construisons son pôle S ; menons la droite j parallèle à s et équidistante de S et de s. Si j ne rencontre pas l'arc, il appartient à une ellipse (*fig.* 200, *a*). Si j est

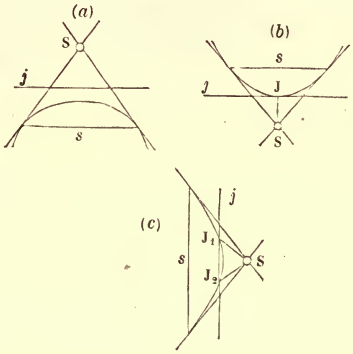
---

[1] Théorèmes de Brianchon et Poncelet énoncés dans un Mémoire inséré au tome XI des *Annales de Mathématiques* (Montpellier, 1821) et reproduits dans le t. II, p. 504 des *Applications d'Analyse et de Géométrie* de Poncelet (Paris, 1864).

[2] C'est ce que l'on a nommé l'*homologie harmonique*. *Voir* Bellavitis, *Saggio di Geometria derivata* (vol. VI des *Nuovi Saggi* de l'Académie de Padoue, 1838), § 50.

tangente à l'arc en un point J, il appartient à une parabole dont SJ sera un diamètre (*fig.* 200, *b*); finalement, si *j* coupe l'arc en deux points J_1,

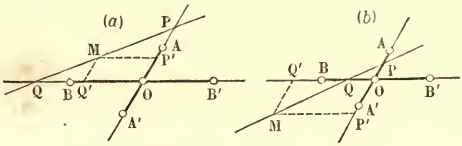
Fig. 200.



J_2 (*fig.* 200, *c*), la courbe sera une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à SJ_1, SJ_2 [1].

252. *Problème.* — Étant donnés de position (non de grandeur) deux diamètres conjugués et une tangente avec son point de contact, construire la courbe (*fig.* 201).

Fig. 201.



Supposons que la tangente rencontre en P, Q les diamètres donnés dont le point commun est O. Projetons le point de contact M en P′ sur OP au moyen d'une parallèle à OQ, en Q′ sur OQ au moyen d'une parallèle à OP. Tout point de OP est le pôle d'une droite parallèle à OQ; en outre, P, M sont des points réciproques, car la polaire de M qui est la tangente passe par P. Donc la polaire de P est MP′; par suite, P et P′ sont aussi des points réciproques. Prenons les points A et A′ de manière que OA = OA′ = la moyenne proportionnelle entre OP et OP′; AA′ sera la longueur du diamètre dirigé suivant OP (218). On trouvera de même la

---

[1] Poncelet, *loc. cit.*, nos 225 et 226.

longueur BB′ de l'autre diamètre en prenant OB = OB′ = la moyenne proportionnelle entre OQ et OQ′.

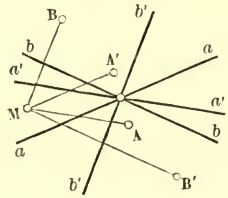
Si les points P, P′ tombent du même côté par rapport à O, l'involution des points réciproques a deux points doubles A, A′ (98), c'est-à-dire : le diamètre OP coupe la courbe. Si au contraire O se trouve entre P et P′, l'involution n'a pas de points doubles, et le diamètre ne rencontre pas la courbe. Dans ce cas, A et A′ sont deux points réciproques équidistants de O.

La figure présente deux cas : celui de l'ellipse (a) et celui de l'hyperbole (b).

253. *Problème.* — Deux couples de diamètres conjugués a et a', b et b' étant donnés de position, ainsi qu'un point M, construire la conique.

Première solution (*fig.* 202). — Par M menons parallèlement à chaque

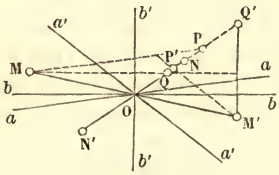
Fig. 202.



diamètre une corde dont le point milieu tombera sur le diamètre conjugué. Les secondes extrémités A, A′, B, B′ des quatre cordes ainsi tracées seront quatre points de la conique cherchée.

Deuxième solution (*fig.* 203). — Désignons par c le diamètre MOM′, et construisons le rayon c' conjugué de c dans l'involution déterminée par

Fig. 203.



les couples aa', bb' ; c' sera le diamètre conjugué de c (225). Par M et M′ menons les droites MP, M′P′ respectivement parallèles à a, a' qui rencontrent c' en P, P′ et se coupent en un point de la courbe (216). Les points P, P′ sont réciproques (244), de manière qu'en prenant sur c' deux

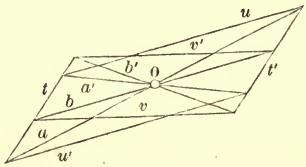
autres points Q, Q′ conjugués dans l'involution déterminée par le couple PP′ et le point central O, MQ et M′Q′ se couperont en un point de la courbe. Prenons ensuite, sur c', ON = ON′ = la moyenne proportionnelle entre OP et OP′; N et N′ seront les extrémités du diamètre c' (218).

Troisième solution. — Des extrémités M, M′ du diamètre qui passe par le point donné menons les parallèles à a, a'; elles se couperont en un point A de la courbe; par les mêmes points traçons les parallèles à b, b'; elles se couperont en un autre point B de la même courbe (216). En prolongeant AO, BO jusqu'en A′, B′, de manière que l'on ait OA′ = AO, OB′ = BO, A′ et B′ seront aussi des points de la conique cherchée (210).

254. *Problème.* — Construire la conique dont on connaît, de position, deux couples de diamètres conjugués aa', bb' et une tangente t.

Première solution. — Construisons la tangente t' parallèle à t (située à la même distance du centre que t); joignons les points où t, t' coupent a, a'; nous aurons ainsi deux autres tangentes parallèles u, u' (216); on en obtiendra encore deux autres v, v' en joignant les points d'intersection de t, t' avec b, b' (*fig.* 204).

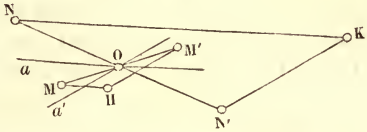
Fig. 204.



Seconde solution. — Les diamètres conjugués a et a', b et b' rencontrent t aux points A et A′, B et B′. Les couples de points AA′, BB′ déterminent une involution dont le point central est le point de contact de t (244). Le problème est ainsi ramené à un problème déjà résolu (252). Si l'involution a des points doubles, on obtiendra les asymptotes en joignant ces points à O.

255. *Problème.* — Construire la conique dont on donne, de position,

Fig. 205.

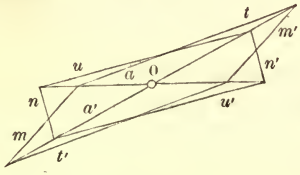


deux diamètres conjugués a, a' et deux points M, N (*fig.* 205).

Soient M′, N′ les secondes extrémités des diamètres qui passent par les points donnés. Menons par M, M′ les droites MH, M′H parallèles à a, a'; menons de même par N, N′ les droites NK, N′K parallèles à a, a'. Les points H, K appartiendront à la courbe à construire.

Problème. — Construire la conique dont on donne, de position, deux diamètres conjugués b, b' et deux tangentes m, n (*fig.* 206).

Fig. 206.



Construisons les tangentes m' parallèle à m et n' parallèle à n; joignons les points où m, m' coupent a, a'; joignons de même les points où n, n' coupent a, a'. Toutes ces droites sont autant de tangentes à la courbe cherchée (216).

256. *Problème.* — Étant donnés cinq points d'une conique, construire deux diamètres conjugués qui fassent un angle donné ([1]).

Trouvons d'abord un diamètre AA′ de la conique (213); sur ce diamètre décrivons un segment capable de l'angle donné et cherchons les points où ce cercle coupe de nouveau la courbe (176, II). Si M est un de ces points, AM, A′M auront les directions de deux diamètres conjugués; mais l'angle AMA′ est égal à l'angle donné : en traçant donc les diamètres parallèles à AM, A′M, le problème sera résolu.

Si le segment décrit est le demi-cercle, cette construction donne les axes.

257. *Problème.* — Construire la conique par rapport à laquelle un triangle EFG soit conjugué et un point donné P le pôle d'une droite donnée p ([2]).

La droite p rencontre FG en un point A; la polaire de A passera par E pôle de FG et par P pôle de p : cette droite sera donc EP; de même FP, GP seront les polaires des points B, C, où p coupe GE, EF. Soit A′ le point où FG est coupée par EP : FG et AA′ seront deux couples de points réciproques, et, si l'involution qu'ils déterminent a deux points doubles

---

([1]) De La Hire, *loc. cit.*, II, 38.

([2]) Staudt, *Geometrie der Lage*, n° 237.

L, L_1, ces points appartiendront à la courbe demandée (220). On peut répéter la même chose pour les deux autres côtés du triangle EFG.

Si le point P est intérieur au triangle EFG, les points A′, B′, C′ sont sur les côtés (finis) FG, GE, EF [1]. La droite p peut couper deux de ces côtés ou être tout extérieure au triangle. Dans le premier cas, les involutions des deux côtés qui sont coupés ont toutes les deux des points doubles (98) : nous aurons ainsi quatre points de la courbe cherchée, et ce problème sera ramené à tracer une conique qui passe par quatre points donnés et par rapport à laquelle deux autres points donnés soient réciproques (248). Dans le second cas, les deux couples de points réciproques de chacun des côtés du triangle EFG empiètent l'un sur l'autre, et l'involution n'a pas de points doubles (98) ; dans ce cas la conique ne rencontre aucun des côtés du triangle conjugué ; elle n'existe donc pas (195).

Si le point P est extérieur au triangle, un seul des trois points A′, B′, C′ se trouve sur le côté correspondant. Si les deux autres côtés sont coupés par p, aucune des involutions n'a de points doubles, et la conique n'existe pas. Si, au contraire, p coupe le premier côté, ou si la droite p est tout extérieure au triangle, la conique existe, et on peut la construire comme ci-dessus.

Dans tous les cas, c'est-à-dire que la conique soit ou ne soit pas réelle, le système *polaire* existe (238) ; il est déterminé par le triangle conjugué EFG, par le point P et par la droite p. Le problème de la construction de ce système est linéaire, tandis que celui de la construction de la courbe fondamentale est du second degré.

258. *Problème.* — Étant donné un pentagone ABCDE, construire la conique par rapport à laquelle chaque sommet est le pôle du côté opposé [2].

Soit F l'intersection de AB, CD. Si l'on construit (257) la conique **K** par rapport à laquelle ADF est un triangle conjugué et E le pôle de BC, les points B, C, où BC rencontre AF, DF, seront les pôles des droites ED, EA qui joignent le point E aux points D, A. Donc chaque sommet du pentagone sera le pôle du côté opposé ; ou, autrement, la conique **K** sera la courbe demandée.

Si l'on construit la conique **C** qui passe par les cinq sommets et la conique **C**′ tangente aux cinq côtés du pentagone (116), ces coniques seront polaires réciproques par rapport à **K** (232).

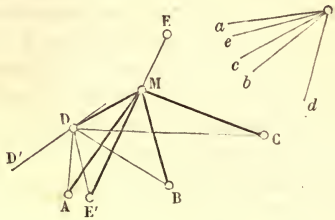
---

(1) Nous entendons ici qu'un point A′ est sur un côté FG du triangle, quand il tombe entre F et G, et qu'une droite coupe un côté FG quand son point d'intersection avec FG tombe entre F et G.

(2) Staudt, *loc. cit.*, nos 238, 258.

259. *Problème.* — Étant donnés cinq points A, B, C, D, E (trois de ces points ne sont pas en ligne droite), trouver un point M tel que le faisceau M(A.B.C.D.E) soit projectif à un faisceau donné *abcde* (*fig.* 207).

Fig. 207.



Tirons par D deux droites DD′, DE′, telles que le faisceau D(A.B.C.D′.E′) soit projectif à *abcde* (66, à droite). Construisons le point E′ où DE′ rencontre la conique déterminée par les quatre points A, B, C, D et par la tangente DD′ (128); puis déterminons le point M, où la même conique rencontre EE′. M sera le point cherché. En effet, M, A, B, C, D, E′ étant des points d'une même conique, le groupe M(A.B.C.D.E′) est projectif au groupe D(A.B.C.D′.E′) qui, par construction, est projectif au faisceau donné *abcde*; mais ME′ passe par E; donc le problème est résolu.

Le problème corrélatif devra être résolu comme exercice.

Trouver une droite *m* qui rencontre cinq droites données *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, dont trois quelconques ne concourent pas en un même point, en cinq points formant un groupe projectif à une ponctuelle de cinq points donnés A, B, C, D, E ([1]).

260. *Problème.* — Diviser un arc de cercle AB en trois parties égales ([2]).

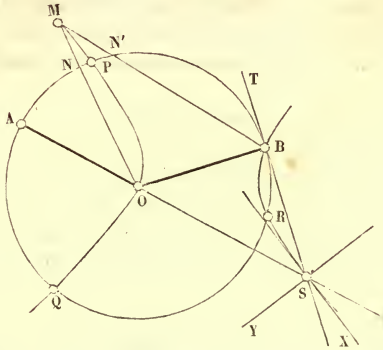
Prenons, sur la circonférence donnée (*fig.* 208), un arc quelconque AN à partir de A, puis à partir de B, mais en sens opposé, un arc double BN′. Menons la tangente BT, les angles AON, TBN′ sont égaux et de sens opposé; ou bien, si N, N′ varient simultanément, les rayons ON, BN′ engendrent deux faisceaux inversement égaux. Le lieu du point M qui leur est commun sera donc une hyperbole équilatère (250) dont les asymptotes ont les directions des bissectrices SX, SY des angles des droites AO, BT; car ces droites sont des rayons correspondants (positions des rayons mobiles ON, BN′ pour lesquelles les arcs AN, BN′ sont nuls). Le centre de l'hyperbole est le milieu de la droite OB qui joint les centres des deux faisceaux.

([1]) Staudt, *loc. cit.*, n° 263.

([2]) Chasles, *Sections coniques*, n° 37. — Staudt, *Beiträge*, n° 432.

Après avoir construit l'hyperbole au moyen du théorème de Pascal, on obtient un point P où elle coupe l'arc donné AB; deux points correspondants N, N′ se confondent en ce point; par suite, P est le point de trisection de l'angle cherché : l'arc AP est la moitié de PB.

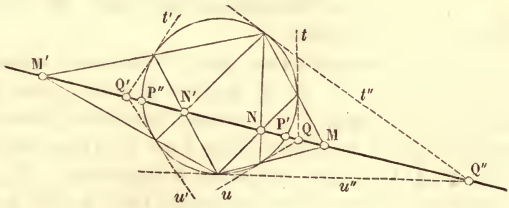
Fig. 208.



L'hyperbole rencontre la circonférence en deux autres points R, Q. Le point R donne la trisection de l'arc complémentaire de AB. Le point Q donne la trisection de l'arc que l'on obtient en retranchant AB de la circonférence entière.

261. Nous avons vu (149) que, si P′, P″, Q′, Q″ (*fig.* 209) sont quatre points donnés en ligne droite et si nous faisons passer par P′, P″ une conique quelconque, la corde de contact d'une tangente à la conique issue de Q′

Fig. 209.



et d'une tangente issue de Q″ passe par un des points doubles M′, N′ de l'involution déterminée par les couples P′P″, Q′Q″. Les deux tangentes issues de Q′, combinées avec les deux tangentes issues de Q″, donnent quatre cordes de contact, dont deux passent par M′ et deux par N′.

On déduit de là un moyen de construire les points doubles de l'involution $P'P''$, $Q'Q''$, ou (98) de trouver deux points M', N' qui divisent harmoniquement deux segments donnés $P'P''$, $Q'Q''$. Décrivons un cercle par $P'P''$ et menons-lui les tangentes t', u' par Q' et les tangentes u', u'' par Q''. La corde de contact des tangentes t', t'' et celle des tangentes u', u'' rencontreront la droite $P'P''$ aux deux points cherchés M', N'.

Cette construction a été employée par Brianchon [1] pour la solution des deux problèmes que nous avons traités au n° 171.

1° Construire une conique dont on donne trois points P, P', P'' et deux tangentes q, q'.

Les tangentes données rencontrent PP' en Q, Q' et PP'' en R, R'. De Q et Q' menons les tangentes au cercle décrit par $PP'P''$; les cordes de contact couperont PP' en deux points M, N; traçons de même les tangentes par R, R' : les cordes de contact couperont PP'' en deux autres points M', N'. Alors chacune des droites MN', NN', $M'N$, MM' rencontrera q, q' en deux points de contact entre ces deux droites et une conique circonscrite au triangle $PP'P''$.

Cette construction ne diffère de celle du n° 171 (à gauche) que par la manière de trouver les points doubles MN, $M'N'$.

2° Construire une conique dont on donne deux points P', P'' et trois tangentes q, q', q''.

Les trois tangentes données rencontrent $P'P''$ en trois points Q, Q', Q'' (*fig.* 209). Des points Q, Q', Q'' menons les tangentes à un cercle quelconque passant par $P'P''$; les cordes de contact des tangentes issues de Q'', combinées avec les tangentes issues de Q, rencontrent $P'P''$ en deux points M, N, et les cordes de contact des tangentes issues de Q'', combinées avec celles des tangentes issues de Q', déterminent de même deux points M', N'.

La corde de contact des tangentes q, q'' à la conique cherchée passera donc par M ou par N, et la corde de contact des tangentes q', q'' passera par M' ou par N'. Les quatre combinaisons MM', MN', NM', NN' donnent les quatre solutions du problème.

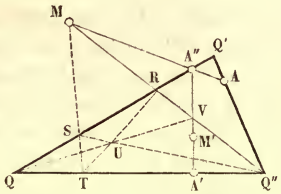
Ce problème est donc ramené au suivant : décrire une conique tangente à trois droites données q, q', q'', de manière que les cordes de contact des tangentes qq'', $q'q''$ passent respectivement par deux points donnés M, M'. Désignons par $QQ'Q''$ le triangle formé par les trois tangentes données, et par A, A', A'' les points de contact à déterminer (*fig.* 210). D'après un corollaire du théorème de Desargues (152), le côté $q \equiv Q'Q''$ est divisé harmoniquement par le point de contact A et par la corde $A'A''$. Supposons que l'on ait projeté ces quatre points harmoniques de A'' sur MQ'' :

---

[1] Brianchon, *loc. cit.*, p. 47 et 51.

il en résultera que le segment RQ″ de MQ″, intercepté entre q', q'', est divisé harmoniquement par M et par la droite A′A″.

Fig. 210.

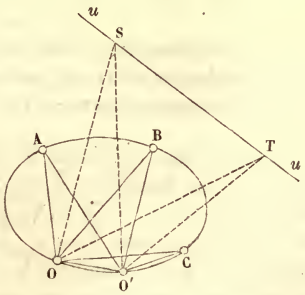


Tirons donc MQ″ : cette droite coupera q'' en R ; déterminons le point V, qui avec M divise harmoniquement RQ″. Pour cela, menons par M une droite quelconque qui coupera q'', q' en S, T, et joignons le point Q au point U commun aux droites SQ″, TR ; cette droite rencontrera RQ″ en V. Tirons ensuite VM′ : cette droite coupera q', q'' en A′, A″, et MA″ coupera Q′Q″ en A.

262. *Théorème.* — Si deux angles de grandeur invariable AOS, AO′S tournent autour de leurs sommets respectifs, de manière que le point S, commun à deux côtés, reste sur une droite fixe u, l'intersection A des deux autres côtés décrira une conique (*fig.* 211).

La démonstration résulte immédiatement de ce que les faisceaux engendrés par les rayons mobiles OA et OS, OS et O′S, O′S et O′A sont projectifs (36, 82). Ce théorème a été donné par Newton sous le nom de *description organique des coniques* (¹).

Fig. 211.



L'élève se proposera de déduire de ce théorème une règle pour décrire

(¹) *Loc. cit.*, liv. I, lemme XXI.

une conique passant par cinq points donnés O, O′, A, B, C; ou bien, ces cinq points étant donnés, déterminer la grandeur des deux angles AOS, AO′S et la droite u, de manière que la conique engendrée passe par les cinq points donnés.

Il pourra aussi s'exercer à démontrer les propriétés suivantes :

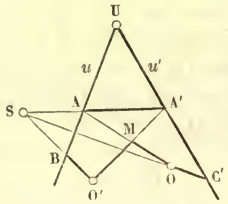
Si l'on décrit, sur la droite OO′ qui joint les sommets des deux angles donnés, un segment capable d'un angle égal à la différence entre quatre angles droits et la somme des angles donnés, la conique sera une hyperbole, une ellipse ou une parabole, suivant que la droite u coupera le cercle en deux points, ne le rencontrera pas ou lui sera tangente. — Déterminer les asymptotes de l'hyperbole, les axes de la parabole.

Quand la conique est-elle un cercle? Quand est-elle une hyperbole équilatère?

Examiner le cas où les deux angles donnés sont supplémentaires. La conique est alors une hyperbole; par suite, si u et OO′ sont parallèles, on obtient une parabole [1].

263. *Théorème.* — Si un triangle varie de manière que ses côtés pivotent autour de trois points donnés O, O′, S (*fig.* 212), tandis que deux sommets

Fig. 212.



A, A′ parcourent deux droites fixes u, u', le lieu du troisième sommet M est une conique qui passe par les points O, O′, par le point uu' et par les points B′, C′, où u et u' coupent respectivement O′S, OS.

264. *Théorème.* — (Le théorème précédent est un cas particulier de celui-ci). Si un polygone varie de manière que ses côtés pivotent autour d'autant de points fixes O_1, O_2, O_3,... (*fig.* 213), pendant que ses sommets, moins un, parcourent des droites fixes u_1, u_2, u_3,..., le dernier sommet décrira une conique; le point commun à tout couple de côtés non consécutifs aura aussi pour lieu géométrique une conique [2].

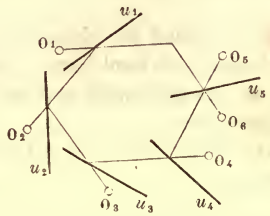
---

[1] Maclaurin, *Geometria organica* (Londres, 1720), sect. I.

[2] Théorème de Maclaurin et de Braikenridge (*Trans. phil.* de Londres, 1735).

Il faudra démontrer ce théorème et son corrélatif [1].

Fig. 213.



265. *Théorème.* — Si deux angles sont circonscrits à une conique, les quatre points de contact de leurs côtés et leurs sommets sont six points d'une conique.

On démontrera ce théorème en faisant voir que les deux faisceaux qui projettent les quatre premiers points des sommets des deux angles sont projectifs; pour cela, on observera que les quatre premiers rayons forment un groupe projectif à celui de leurs pôles relatifs à la conique donnée.

266. *Théorème* (corrélatif du précédent). — Si deux angles sont circonscrits à une conique, les quatre côtés et les deux cordes de contact sont six tangentes d'une même conique [2].

Il suffit de démontrer que les deux cordes coupent les quatre autres droites en deux groupes projectifs de points, le premier groupe étant projectif à celui qui est formé par les polaires relatives à la conique donnée.

267. *Problèmes.* — I. Étant donnés trois segments AA′, BB′, CC′ sur une même droite, trouver un point d'où l'on puisse les voir, tous les trois, sous des angles égaux (83).

Quand ces angles peuvent-ils être droits? (*Voir* n° 98, II.)

II. Deux ponctuelles projectives superposées étant données, trouver un point séparé harmoniquement d'un point donné sur la droite par les deux points unis [non donnés [3]].

III. Étant donnés deux couples de points en ligne droite, trouver sur cette droite un cinquième point, tel que le produit de ses distances aux deux points du premier couple soit au produit de ses distances aux points du second couple dans un rapport donné [4].

---

(1) Poncelet, *loc. cit.*, n° 502.

(2) Chasles, *Sections coniques*, n°s 213, 214.

(3) Chasles, *Géom. sup.*, n° 269.

(4) Problème de la *Section déterminée* d'Apollonius. *Voir* Chasles, *Géom. sup.*, n° 281.

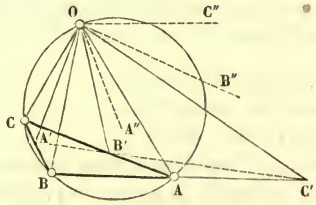
IV. Mener par un point donné une transversale qui détermine sur deux droites données, à partir de deux points donnés, deux segments dont le rapport ou le produit soit donné ([1]).

268. *Théorème.* — Si l'on prend sur chaque diagonale d'un quadrilatère complet deux points qui la divisent harmoniquement, et, si trois de ces six points (un sur chaque diagonale) sont en ligne droite, les trois autres sont aussi en ligne droite.

Corollaire. — Les trois points milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

269. *Théorème.* — Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle, et si d'un point O de la circonférence on abaisse sur les côtés des obliques OA′, OB′, OC′ sous un même angle (de même sens), les pieds A′, B′, C′ de ces obliques sont une ligne droite (*fig.* 214).

Fig. 214.



Menons par O les parallèles OA″, OB″, OC″ à BC, CA, AB : on démontrera facilement que les angles AOA″, BOB″, COC″ ont les bissectrices communes : les angles AOA′, BOB′, COC′ jouissent donc de la même propriété. Par conséquent (106, II), les côtés de ces trois angles forment des couples en involution, et (103) les points A′, B′, C′ sont en ligne droite ([2]).

270. *Théorème.* — Étant donné un triangle circonscrit à un cercle, si l'on abaisse, de ses sommets sur une tangente, des obliques qui soient vues du centre sous des angles égaux (grandeur et sens), les trois obliques concourent en un même point ([3]).

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

([1]) Problèmes de la *Section de raison* et de la *Section de l'espace* d'Apollonius. *Voir* Chasles, *Géom. sup.*, nos 296 et 298.

([2]) Chasles, *loc. cit.*, no 386.

([3]) Chasles, *loc. cit.*, no 387.

271. Ce sera un exercice très-utile que d'appliquer la théorie des pôles et des polaires à la résolution des problèmes du premier et du second degré par le moyen de la règle seulement, en supposant toutefois qu'un cercle fixe et son centre soient donnés. Voici quelques exemples à traiter :

I. Mener par un point donné P la parallèle à une droite donnée e.

Il faut trouver le pôle E de e [1] et la polaire p de P; soit A le point commun aux droites p, OE; la polaire a de A sera la droite cherchée.

II. Mener par un point donné P la perpendiculaire à une droite donnée e.

Menons par P la parallèle à OE : ce sera la droite cherchée.

III. Diviser un segment donné AB en deux parties égales.

Soient a, b les polaires de A, B; soit c le diamètre qui passe par le point ab; la droite d, qui rend harmonique le groupe $abcd$, aura pour pôle le point milieu de AB.

IV. Diviser en deux parties égales un arc MN du cercle donné.

Construisons le pôle S de la corde MN : le diamètre qui passe par S donnera le point milieu cherché.

V. Diviser un angle donné en deux parties égales.

Menons par un point du cercle les parallèles aux côtés de l'angle donnés et le problème actuel se ramène au précédent.

VI. Prolonger un segment AC d'une longueur égale CB.

Soient a, c les polaires de A, C; soient d le diamètre qui passe par le point ac, et c le rayon qui rend harmonique le groupe $abcd$; le rayon c aura pour pôle le point cherché C.

VII. Construire le cercle dont le centre est au point donné U, et dont le rayon est égal à une droite donnée UA.

Prolongeons AU d'une longueur égale UB; menons en A et en B les perpendiculaires à AB et divisons en parties égales les angles droits A, B : ces bissectrices concourront en C, D. Il suffira donc de construire la conique qui a pour diamètres conjugués AB, CD (244, I).

---

[1] Pôles et polaires par rapport à un cercle donné.

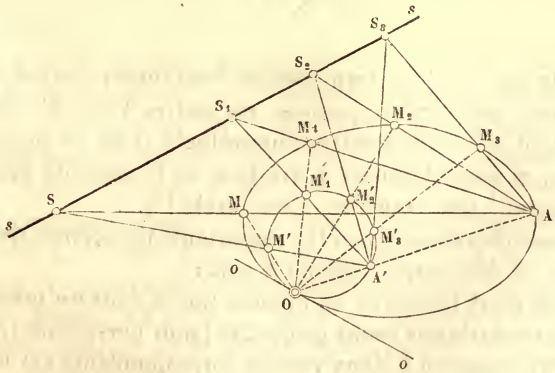
APPENDICE.

On peut donner des théorèmes **114**, I et **114**, II des démonstrations qui se rattachent mieux à la méthode graphique, dont il a généralement été fait usage dans les *Éléments de Géométrie projective*, que celles que M. Cremona a empruntées au *Traité des sections coniques* de M. Chasles.

Pour cela, il faut d'abord remplacer la rédaction du n° 18 (page 15) par la suivante :

« Le centre d'homologie est un point qui se correspond à lui-même, et tout rayon passant par ce centre est à lui-même son correspondant. Donc, si une courbe passe par O, la courbe correspondante passera aussi par O, et les deux courbes ont même tangente en ce point. Dans la *fig. a* nous supposons

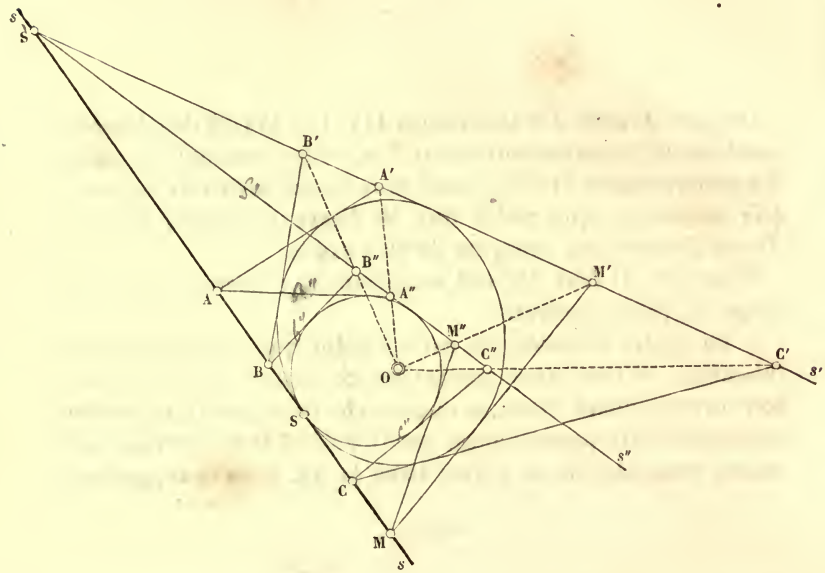
Fig. *a*.



que l'on donne, en outre, l'axe d'homologie *s* et le point A qui correspond à un point A′ du cercle à transformer.

» De même, tout point de l'axe d'homologie est à lui-même son correspondant. Donc, si une courbe de la première figure touche *s* en un point, la courbe correspondante de la seconde figure sera tangente à *s* en ce même point. Dans la *fig. b* nous

Fig. *b*.



donnons un cercle à transformer homologiquement par ses tangentes, et nous supposons, en outre, l'axe d'homologie tangent au cercle, le centre d'homologie O en un point quelconque, et nous donnons la droite *a* de la seconde figure qui correspond à une tangente *a'* du cercle [1]. »

Ces modifications faites, les importants théorèmes du n° 114 peuvent se démontrer comme il suit :

« I. Si deux faisceaux de rayons, tracés dans un même plan (non concentriques) sont projectifs (non perspectifs), le lieu du point commun à deux rayons correspondants est une co-

[1] La *fig.* 10 du texte est remplacée par les figures nouvelles *a* et *b*.

nique, qui passe par les centres des deux faisceaux ; les tangentes en ces points sont les rayons des deux faisceaux qui correspondent à la droite qui joint les centres.

» Soient O et A les centres des deux faisceaux, AM_1 et OM_1, AM_2 et OM_2,... des couples de rayons correspondants. Le lieu des points M_1, M_2... passe par le point O, parce que le rayon AO du faisceau A et le rayon correspondant du faisceau O se coupent en O. De même, A est un point du lieu.

» Soit *o* le rayon du faisceau O qui correspond au rayon AO du faisceau A. Traçons un cercle tangent à *o* au point O, et soit A′ le point où ce cercle coupe OA. Soit de même M′ l'intersection du rayon OM avec le cercle, le faisceau A′M′ sera directement égal au faisceau OM : il sera donc projectif au faisceau AM, et comme le rayon A′O correspond au rayon AO, les faisceaux AM et A′M′ sont perspectifs ; par suite, leurs rayons correspondants se coupent en des points S_1, S_2, S_3,... en ligne droite *s*. Il résulte de là que, pour construire le point du lieu cherché situé sur un rayon quelconque *m* du faisceau A, il suffira de prolonger *m* jusqu'à sa rencontre S avec *s*, puis de prendre l'intersection M de cette droite et de *m*. Or cette construction est précisément celle que nous avons employée (*fig. a*) pour trouver la courbe homologique d'un cercle, *s* étant l'axe, O le centre d'homologie et A′, A deux points correspondants. Le lieu des points M est donc une conique.

» II. Si deux droites ponctuelles, situées dans un même plan (non superposées) sont projectives (non perspectives), les droites qui joignent les couples de points correspondants enveloppent une conique, c'est-à-dire sont les tangentes d'une conique. Cette conique touche les deux droites données aux points qui correspondent à leur commune intersection.

» Soient *s*, *s′* deux ponctuelles projectives A et A′, B et B′,... des couples de points correspondants. La courbe enveloppe des droites AA′, BB′,... est aussi tangente à la droite *s* qui joint le point *ss′* ou S′ de la seconde ponctuelle au point S de la première. De même, *s′* est une autre tangente.

» Décrivons un cercle tangent à *s* en S et menons-lui des tangentes *a″*, *b″*, *c″*,..., *s″* des points A, B, C,..., S′ ; les tan-

gentes a'', b'', c'',... marqueront sur s'' une ponctuelle projective à s et, par suite, à s'. Mais le point S′ se correspond à lui-même dans les ponctuelles s', s'' ; donc elles sont perspectives, et les droites A″A′, B″B′, C″C′,... concourent en un point O. Il résulte de là que, si l'on veut déterminer le point M′ de s' qui correspond à un point quelconque M de s, il suffira de mener par M une tangente m au cercle, de prendre l'intersection M″ de m et s'', de joindre O avec M″ et de prendre enfin le point M′ commun à OM″, s'. Alors MM′ sera une des droites de l'enveloppe. Or cette construction est précisément celle que nous avons adoptée (*fig. b*) pour trouver la figure homologique d'un cercle, l'axe d'homologie s étant tangent à ce cercle, le centre d'homologie un point quelconque O, et s', s'' deux droites correspondantes. Donc l'enveloppe des droites MM′ est une conique. »

Iles d'Hyères, 14 mars 1875.

Ed. DEWULF.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

		Pages
PRÉFACE		V
§ I.	*Définitions* (1-7)	1
§ II.	*Projection centrale* (8-15)	3
	Figures perspectives (9)	3
	Point à l'infini d'une droite (10)	4
	Droite à l'infini d'un plan (11)	5
	Théorèmes de *Desargues* sur les triangles perspectifs (14, 15)	7
§ III.	*Homologie* (16-18)	8
	Figures homologiques (16-18)	8
	Constructions de figures homologiques (18)	10
§ IV.	*Figures homologiques à trois dimensions* (19-20)	17
	Plan à l'infini (20)	17
§ V.	*Formes géométriques* (21-26)	17
§ VI.	*Principe de dualité* (27-32)	20
§ VII.	*Formes projectives* (33-37)	27
§ VIII.	*Formes harmoniques* (38-52)	32
	Théorème fondamental (38)	32
	Projectivité des formes harmoniques (43)	39
	Constructions (50)	40
§ IX.	*Rapports anharmoniques* (53-59)	44
	Théorème de *Pappus* (53)	44
	Propriétés des groupes harmoniques (54-55)	47
	Les vingt-quatre rapports anharmoniques de quatre éléments (57)	52
	Propriété métrique exprimant la projectivité de deux ponctuelles (59)	54
§ X.	*Constructions des formes projectives* (60-72)	55
	Cas des formes perspectives (62)	55
	Formes projectives superposées (63)	57
	Elles ne peuvent avoir plus de deux éléments unis (64)	59
	Constructions (66-69, 71)	61
	Théorème de *Pappus* sur l'hexagone inscrit à deux droites (69)	64
	Théorèmes plus généraux (70)	65

Pages

§ XI. *Cas particuliers et exercices* (73-91) 69

Ponctuelles semblables (73) 69
Faisceaux égaux (78) 72
Propriétés métriques (83) 74
Exercices (84 et suiv.) 77
Porismes d'*Euclide* et de *Pappus* (88) 80
Problèmes à résoudre par la règle seulement (89) 80
Théorèmes de *Chasles* sur les figures perspectives (90) 84

§ XII. *Involution* (92-106) 85

Définition (93, 94) 85
Propriété métrique (96) 88
Les deux cas de l'involution (98) 89
Autre propriété métrique (100) 92
Quadrangle coupé par une transversale (101) 93
Constructions (102) 95
Théorème de *Ceva* et de *Ménélaüs* (104) 96

§ XIII. *Formes projectives dans le cercle* (107-112) 100

§ XIV. *Formes projectives dans les coniques* (113-123) 104

Théorèmes fondamentaux (113) 104
Génération des coniques au moyen de deux formes projectives (114) 106
Théorèmes de *Pascal* et de *Brianchon* (117) 110
Théorèmes de *Möbius* et de *Maclaurin* (118, 119) 112
Propriété de la parabole (120) 114
Propriétés de l'hyperbole, théorème d'*Apollonius* (122, 123) 116

§ XV. *Constructions et exercices* (124-126) 118

Application des théorèmes de *Pascal* et de *Brianchon* à la construction des coniques par points ou par tangentes (124). 118
Cas où quelques éléments sont à l'infini (125, 126) 119

§ XVI. *Corollaires des théorèmes de* Pascal *et de* Brianchon (127-142). 123

Théorèmes sur le pentagone inscrit (127) 123
Théorèmes de *Maclaurin* sur le quadrangle inscrit (129, 131). 126
Théorème sur le quadrilatère circonscrit et sur le quadrangle formé par les points de contact (132, 133) 128
Théorème sur le quadrilatère circonscrit (135) 130
Théorèmes sur le triangle inscrit et sur le triangle circonscrit (137, 139) 131
Théorème sur le pentagone circonscrit (141) 133
Application de ces théorèmes à la construction des coniques (128, 130, 134, 136, 138, 140, 141) 134
Coniques tangentes entre elles (142) 134

Pages

§ XVII. *Théorème de* Desargues (143-156)..... 135
Théorème de *Desargues* et théorème corrélatif (143)..... 135
Coniques circonscrites à un même quadrangle ou inscrites dans un même quadrilatère (145)..... 137
Théorèmes de *Poncelet* (146)..... 138
Corollaires du théorème de *Desargues* (147, 149, 151, 152).. 139
Constructions (144, 148, 150)..... 140
Groupe harmonique de quatre points ou de quatre tangentes (152, 153)..... 143
Propriété de l'hyperbole (154)..... 145
Théorème de *Pappus ad quatuor lineas,* et théorème corrélatif (155, 156)..... 146

§ XVIII. *Éléments unis et éléments doubles* (157-165)..... 147
Séries projectives de points sur une conique (157)..... 147
Séries projectives de tangentes à une conique (158)..... 149
Involution de points sur une conique (159-161)..... 151
Construction des éléments unis de deux formes projectives superposées et des éléments doubles d'une involution (162). 156
Couple commun à deux involutions superposées (164)..... 161

§ XIX. *Problèmes du second degré* (166-185)..... 164
Intersection d'une conique et d'une droite ; tangentes menées d'un point à une conique (166)..... 164
Coniques déterminées par quatre points et une tangente, ou par quatre tangentes et un point (170)..... 168
Coniques déterminées par trois points et deux tangentes ou par deux points et trois tangentes (171)..... 170
Construction de polygones sous des conditions données (172-175, 185), VI..... XI 172
Construction des points communs à deux coniques (176).... 177
Problèmes divers (177-172, 185)..... 178
Méthode géométrique de fausse position (183)..... 181
Résolution de problèmes du second degré au moyen de la règle seulement, quand on dispose d'un cercle décrit (184)..... 182

§ XX. *Pôles et polaires* (186-205)..... 188
Droite polaire d'un point donné (186)..... 188
Pôle d'une droite donnée (187)..... 189
Points réciproques (189)..... 191
Constructions (191, 193, 200, 201)..... 192
Triangles conjugués (192, 194)..... 193
Quadrangles complets doués d'un même triangle diagonal (196)..... 194
Coniques ayant un même triangle conjugué (199, 202)..... 198
Autres théorèmes sur les triangles inscrits ou circonscrits (204, 205)..... 201

Pages

§ XXI. *Centre et diamètres* (206-229) 202
Diamètre relatif à un système de cordes parallèles (206) 202
Cas de la parabole (208) 203
Centre (210) 204
Diamètres conjugués (212) 206
Parallélogrammes inscrits ou circonscrits (214-216) 207
Cas du cercle (217) 208
Théorème de *Möbius* (219) 211
Involution de points réciproques ou de droites réciproques (220) 211
Diamètre idéal ; corde idéale (218, 223) 214
Involution des diamètres conjugués ; axes (225, 226) 215
Théorème de *Newton* sur les centres des coniques inscrites dans un quadrilatère (228) 218
Construction (213, 222, 227, 229) 219

§ XXII. *Figures polaires réciproques* (230-238) 220
Courbes polaires réciproques (230) 220
La polaire réciproque d'une conique est une autre conique (232) 221
Les figures polaires réciproques sont des figures corrélatives (234) 222
Deux triangles conjugués à une même conique (236) 223
Deux triangles inscrits ou circonscrits à une même conique (237) 225
Théorème de *Hesse* (238) 227
Système polaire (237), IV 229

§ XXIII. *Corollaires et constructions* (239-271) 230
Constructions diverses relatives à l'hyperbole et à la parabole (239-243) 230
Propriétés des diamètres conjugués ; théorèmes d'*Apollonius* (244-245) 234
Théorème de *Carnot* (246) 241
Constructions de coniques (247-249, 252-259, 261) 245
Hyperbole équilatère (250) 247
Construction pour reconnaître l'espèce de la conique à laquelle appartient un arc donné (251) 250
Trisection d'un arc donné circulaire (260) 256
Description organique des coniques de *Newton* (262) 259
Autres théorèmes et problèmes divers (265-270) 260
Application de la théorie des pôles à la résolution des problèmes du second degré (271) 263

APPENDICE 265

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

1478 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

ERRATA.

Pages	Lignes	*Au lieu de*	*Lisez*
XIII	20 et 21	démonstration	analyse
19	4	projectives	perspectives
19	17	infinité de rayons	infinité de faisceaux de rayons
21	12 et 13	considérés comme formés	considérée comme formée
25	2	S	*s*
25	5 à gauche	n° 13	n° 15
25	5 à droite	n° 12	n° 14
25	7 à droite	S	*s*
25	14 à gauche	S	*s*
47	16	nécessaire	nécessaire et suffisante
47	9 en remontant	— (BCAD)	+ (BCAD)
51	7	BACD	BADC
53	11	ACBD	ACDB
78	13	n° 12	n° 14
80	2	projectives	perspectives
107	13	(66)	(16)
122	figure 102	*p*	*q*
122	figure 102	*q*	*p*
186	10 en remontant	OA′	UA′
190	13	*fig.* 102	*fig.* 168
202	7	*fig.* 160	*fig.* 170

2410 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

7 7642

RETURN TO ▶ Astronomy/Mathematics/Statistics Library
100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1 7 DAYS	2	3
4	5	6

DUE AS STAMPED BELOW

~~DEC 16 1992~~		

FORM NO. DD3

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

QA471
C72

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037545398

MATH/STAT.

_6 HO